IVAN GUILHON MITOSO ROCHA

FÍSICA

EM NÍVEL OLÍMPICO

VOLUME I

A Deus, criador do céu e da terra,
de todas as coisas visíveis e invisíveis.

Sobre o Autor

Ivan Guilhon graduou-se em Engenharia Eletrônica no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) no ano de 2014 com distinção Magna Cum Laude, outorgada a alunos que atingiram alto grau de desempenho acadêmico nas disciplinas do curso de engenharia. Atualmente está cursando o seu doutorado no programa de Física Atômica e Molecular no ITA. O autor tem trabalhos apresentados em congressos científicos e artigos publicados em periódicos sobre materiais bidimensionais e suas possíveis aplicações tecnológicas. Ivan está envolvido desde 2009 com a preparação de alunos para olimpíadas internacionais de Física em colégios de diferentes estados do Brasil.

Como competidor em olimpíadas científicas conquistou, entre outras premiações:

- Medalha de ouro na Olimpíada Brasileira de Física (OBF) em 2007 e 2009;
- Medalha de prata na Olimpíada Internacional de Física (IPhO) em 2009;
- Primeiro lugar no prêmio IFT de Jovens Físicos 2012;
- Duas vezes agraciado com o terceiro prêmio na Competição Internacional de Matemática (IMC) na Bulgária, em 2012 e 2014.

Carta ao leitor

Caro leitor,

este livro que você acaba de adquirir foi fruto de muito estudo e trabalho distribuídos em anos de envolvimento com olimpíadas científicas. Foram vários anos atuando como estudante, como professor e agora como um autor de livro! Há aqui reunido uma coletânea de problemas cativantes que me marcaram em diferentes momentos da minha trajetória olímpica. São problemas que podem desafiar desde um aluno de ensino médio que busca aprofundar seus conhecimentos até um estudante de ensino superior. Espero que vocês enxerguem beleza nesses problemas da mesma forma que eu!

Após minha formatura no ITA, decidi que me dedicaria a esse projeto pessoal, que era um sonho de alguns anos. Depois dessa decisão vieram incontáveis noites de trabalho para se produzir esse livro, em paralelo com o meu curso de doutorado em Física. Foram meses vasculhando livros, revistas de ensino, olimpíadas científicas de diferentes lugares do mundo, provas de seleção de times das internacionais, até chegar nesta coletânea de problemas. Espero que todo esse trabalho tenha valido a pena e que o resultado dele possa ajudar muita gente a aprender um pouco mais de Física.

O processo de produção desse livro foi feito de modo a torná-lo o mais acessível ao público em geral. Por conta disso, conto com a ajuda de vocês para melhorar cada vez mais essa obra enviando notificações de erros e sugestões para o email: `nivel.olimpico@gmail.com`.

Bons estudos!

Estrutura do livro

O livro a seguir contém uma lista de problemas, acompanhados de dicas e de soluções. Os exercícios escolhidos abrangem cinemática e dinâmica da partícula, termologia, gases ideais, termodinâmica, teoria cinética dos gases, noções de mecânica estatística, óptica geométrica, óptica física e ondulatória. Os problemas estão organizados em três capítulos:

1. Mecânica;
2. Termodinâmica;
3. Óptica e ondulatória.

Na primeira parte do livro encontram-se os enunciados dos problemas propostos. Os enunciados vêm acompanhados de uma indicação da dificuldade do problema em ordem crescente, variando de *, ** até ***.

A parte II do livro contém dicas que podem auxiliar na solução do problema, oferecendo muitas vezes os primeiros passos ou ideias da solução proposta. Na parte III encontram-se as soluções de todos os problemas propostos. Na parte IV há uma lista de referências bibliográficas, de teoria e de exercícios, além de referências auxiliares de matemática.

Orientação de estudos

Esse livro foi pensado para um público que busca uma preparação de alto nível para olimpíadas científicas de Física. Vale salientar que alunos que se preparam para vestibulares altamente concorridos, ou mesmo estudantes universitários, podem fazer excelente uso desse material devido as questões de alto nível.

Uma rápida observação nas soluções dos problemas propostos é suficiente para verificar que grande parte delas demanda conhecimentos

de cálculo diferencial e integral, o que não é comumente ensinado para alunos de ensino médio. No entanto, as provas seletivas para as equipes das olimpíadas internacionais, assim como essas competições, costumam exigir esses conhecimentos.

Antes de atacar os problemas expostos nesse livro é fundamental ter o domínio da matéria de Física cobrada no ensino médio convencional do assunto correspondente. No final do livro, você pode observar uma lista de excelentes referências sugeridas para usar em conjunto com esse material nos seus estudos.

Satisfeita essa primeira condição, você deve estar pronto para navegar por águas mais profundas! Se você for um aluno de ensino médio, é útil ter algum livro de Física em nível superior e algum material de introdução ao cálculo diferencial e integral. Focaremos nesse livro em uma aplicação prática e intuitiva dessa teoria, ignorando algumas vezes os seus pormenores, pois para nós **a Matemática é uma ferramenta e a Física é o prato principal.**

Seguem algumas dicas de estudo para olimpíadas científicas de Física:

1. Aprenda cálculo diferencial e integral.

   Grande parte da diferença de cobrança entre Física de ensino médio convencional e olimpíadas de Física está na exigência de um formalismo matemático mais poderoso, muitas vezes contendo noções básicas de cálculo diferencial e integral.

   Saber efetuar funções derivadas, funções integrais e entender as suas interpretações físicas é suficiente para acompanhar o livro. Não se preocupe caso não domine esses assuntos no início dos seus estudos, com um pouco de tempo, prática e esforço você se habituará com esse tipo de matemática.

   Seguem agora algumas valiosas dicas de estudo para olimpíadas científicas:

2. Escolha uma (ou mais) coleção de nível superior para orientar seu estudo.

Em nível de olimpíada é extremamente útil que você utilize na sua preparação os livros das matérias iniciais de Física de âmbito universitário. Não se espera que você resolva todos os problemas desses livros, é importante, porém, que você busque se acostumar com esse outro nível de profundidade no assunto. Concentre-se bastante em exercícios resolvidos e nos exemplos fornecidos nos livros. Refazer demonstrações da teoria também ajuda bastante.

3. Tenha diferentes livros de exercícios.

   Após estudar a teoria, é hora de se preparar para as provas! Para se sair bem, além de ter uma boa teoria, é preciso treinar a resolução de exercícios. Os problemas desse livro são de alto nível e tem como foco desenvolver a sua criatividade. É interessante combiná-lo com outros livros de exercícios que tenham exercícios mais básico, por exemplo. Algumas sugestões estão listadas na parte IV do livro.

4. Explore as provas antigas.

   A seleção das equipes brasileiras para as olimpíadas internacionais é realizada pela Sociedade Brasileira de Física (SBF) e pode variar um pouco de ano para ano. É importante que você esteja atento às regras de seleção e ao formato de prova que você vai fazer.

   Consiga acesso a provas antigas e resolva todas. Se sobrar um tempo, busque provas de olimpíadas de diferentes lugares do mundo (IPhO, APhO, OIbF, outras olimpíadas nacionais)!

Prefácio

O estudo da Física é fascinante, mas exige esforço e dedicação. É inegável e ilusório pensar que é possível compreender a teoria Física sem resolver um número considerável de exercícios. Se você é um estudante que vê beleza na matemática e na física e gosta de desafios, então com certeza fará um bom uso deste livro. Compreender a física e realizar exercícios desafiadores trabalha o modo de pensar e é uma motivação em si mesmo. Certamente, Ivan Guilhon apresenta isso de forma singular em seu livro, separando-o em três seções: os exercícios propostos, as dicas de resolução e, finalmente, as soluções. Essa separação torna o livro muito mais pedagógico, uma vez que permite ao leitor não apenas tentar resolver os problemas, mas, se este não conseguir após algumas tentativas, ainda sem ver a solução, analisar as dicas de solução e trabalhar mais um pouco o seu modo de pensar.

Essa coletânea de exercícios em português é sem dúvida valiosa também do ponto de vista da nossa sociedade brasileira, tão carente do ponto de vista da educação, o que não quer dizer ausente de seres curiosos e audaciosos que querem compreender a vida e usufruir da liberdade que o conhecimento proporciona.

Não posso deixar de terminar este prefácio sem falar um pouco sobre o autor. Conheci Ivan, ainda durante o segundo ano da graduação no ITA, quando fui a sua professora de Eletricidade e Magnetismo, na sequência também ministrei a disciplina de Ondas e Física Moderna para a sua turma. No ITA há um sistema de tutoria, no qual se configuram conselheiros (professores) e aconselhados (alunos), e também tive o prazer de tê-lo como meu aconselhado. Ainda durante o curso de graduação, motivada pelo seu excelente desempenho nas disciplinas e seu entusiasmo para com a Física, convidei-o para integrar o grupo de pesquisa, do qual fui uma das fundadoras no ITA, o Grupo de Materiais Semicondutores e Nanotecnologia do ITA. Foi neste período que Ivan iniciou o seu trabalho de iniciação científica e pôde apresentar seus

resultados científicos na conferência *International Material Research Society*, realizada em Cancún. Na sequência, após formado iniciou o Doutorado Direto sob a minha orientação.

Posso dizer que tive e tenho o privilégio de trabalhar com uma pessoa que, muito além de ser inteligente, é extremamente humana, preocupada com a sociedade, por isso mesmo teve várias atuações neste sentido, como, por exemplo, ser professor do CASDVest, que tem por missão aprovar pessoas sem condições financeiras em universidade públicas, oferecendo ensino de qualidade por meio de um curso pré-vestibular sem fins lucrativos. E, é neste sentido humano e de repartir o seu conhecimento e, através do seu comprometimento com a educação, que Ivan dedicou o seu tempo precioso e preparou este livro que, com certeza, poderá ajudar outras centenas ou milhares de estudantes a atingirem seus objetivos.

Bom trabalho a todos os estudantes que quiserem se divertir um pouco, se desafiando, persistindo e indo além dos seus limites!

Lara Kühl Teles

Conteúdo

II Dicas de resolução 95

1 Mecânica da Partícula 97

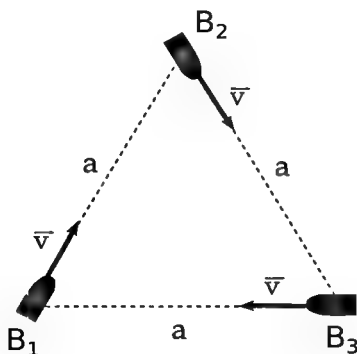
Parte I

Problemas propostos

1

Mecânica da Partícula

1.1 Barcos em formação triangular*

Considere que três barcos B_1, B_2 e B_3 viajam em um lago com velocidades de módulo constante e igual a v. B_1 sempre viaja em direção a B_2, que por sua vez viaja em direção a B_3 que, por último, viaja em direção a B_1. Inicialmente, as embarcações estão em pontos na superfície da água que formam um triângulo equilátero de aresta a, como mostra a figura a seguir.

(a) Quanto tempo dura até que as embarcações se encontrem?

(b) Calcule a expressão da trajetória descrita por um dos três barcos.

1.2 Desvio de um asteroide*

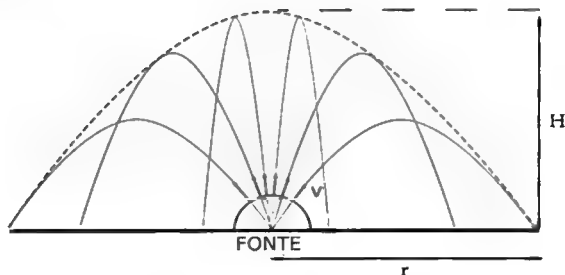
Uma nave espacial está viajando no espaço sideral em uma velocidade de $V = 1000$ m/s. Subitamente o comandante observa um grande asteroide se aproximando logo à frente, com a sua superfície distante de $d = 9$ km da nave. Considere que o asteroide tem o formato esférico e que seu diâmetro é de $2R = 7$ km. O comandante percebe que a melhor manobra evasiva possível é acionar os propulsores de emergência do foguete, o que é capaz de alterar instantaneamente a velocidade da nave de um vetor $\delta\vec{v}$, cujo módulo vale 300 m/s orientado em uma direção desejada. É possível evitar a colisão?

1.3 Alcance do Chafariz*

Em uma praça existe uma fonte muito interessante. Ela tem o formato de um hemisfério de raio bem pequeno, preenchida de vários furos, de tal forma que possa lançar água para todos os lados de maneira aproximadamente uniforme. A fonte é alimentada por uma bomba e a água que sai da fonte, por todos os seus furos, tem velocidade v. A aceleração local da gravidade é dada por g.

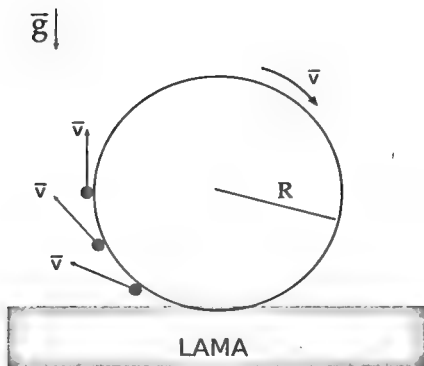
(a) Qual a altura máxima H atingida por um jato de água?

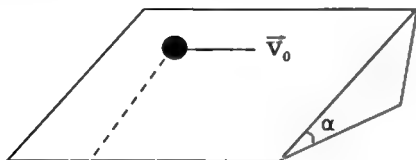
(b) Qual o raio r que deve ser isolado da fonte para que pedestres não se molhem?

(c) Qual é o formato geométrico definido pelo conjunto de todos os jatos de água lançados pela fonte? Esses pontos estão delimitados pela linha tracejada da figura.

1.4 Carro no atoleiro*

Um carro encontra-se preso em um atoleiro. Nessa situação suas rodas de raio R estão livres para girar com uma velocidade $v > \sqrt{Rg}$ (g é a aceleração local da gravidade) e lança lama para diversas direções.

Mostre que a lama lançada pelos pneus do carro não pode atingir uma altura superior a

$$H = R + \frac{v^2}{2g} + \frac{gR^2}{2v^2}. \tag{1.1}$$

1.5 Deslizamento bidimensional no plano inclinado**

Considere um bloco na superfície de um plano inclinado cuja inclinação dada é pelo ângulo α. O coeficiente de atrito é tal que o bloco desce com velocidade constante após ser colocado no plano e receber um leve impulso na direção da linha tracejada na figura a seguir.

Considere agora que, ao invés de aplicar um impulso na direção de declive do plano inclinado, imponha-se uma velocidade v_0 na direção horizontal e que após a aplicação desse impulso o bloco inicie o seu movimento de deslizamento no plano inclinado. Determine qual será a velocidade terminal do bloco nesse movimento.

1.6 A corrente e a balança (OIbF) **

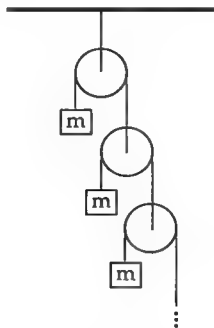
Uma corrente unidimensional homogênea de comprimento L e massa M é suspensa por uma ponta, ficando a outra ponta quase tocando a superfície de uma balança. A corrente se mantém esticada e imóvel. Subitamente a corrente é solta e cai verticalmente sobre a balança.

(a) Determine a tensão em cada elo da corrente antes de ser solta. Dê a resposta como função da distância z medida a partir do extremo inferior da corrente.

(b) Determine a tensão em cada ponto da corrente imediatamente depois de ser solta.

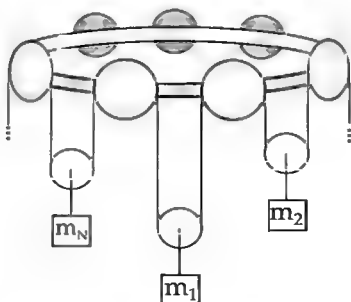
(c) Determine e esboce um gráfico da força registrada pela balança em função do tempo, supondo que seus elos não soltem ao bater no prato da balança, e que é desprezível a oscilação do prato da balança. Considere que o registro é feito desde que a corrente começa a cair até que seu último elo caia sobre o prato da balança. Indique no gráfico os pontos mais significativos, deduzindo as expressões algébricas que permitem calcular os respectivos valores.

1.7 Máquina de Atwood com infinitas massas**

Considere nesse problema um sistema composto de um conjunto infinito de cordas inextensíveis, polias e massas idênticas de valor igual a m, dispostas conforme ilustrado na figura a seguir. Cada uma das cordas é ligada a uma massa e a uma polia, como se pode observar.

O sistema é mantido inicialmente com todas as massas em repouso e então é liberado para que as massas possam iniciar seus respectivos movimentos sob ação exclusiva da aceleração gravitacional local g. Determine a aceleração da primeira massa, localizada mais acima na figura.

Despreze as dimensões físicas e as massas das polias, assim como quaisquer efeitos dissipativos.

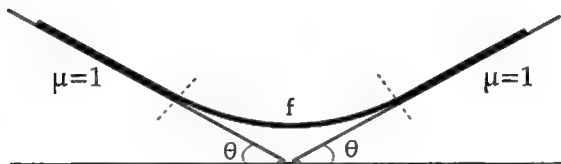
1.8 Anel de polias*

Considere um arranjo de N polias móveis conectadas a N polias fixas, dispostas ao redor de um anel. A polias móvel i é conectada a uma massa de m_i, onde i =1, 2, ..., N. As polias são todas conectadas por uma corda de comprimento inextensível e massa desprezível, conforme ilustrado na figura a seguir.

O sistema é mantido inicialmente com todas as massas em repouso e então é liberado para que as massas possam iniciar seus respectivos movimentos sob ação exclusiva da aceleração gravitacional local g. Calcule a aceleração a_i de cada uma das N massas.

1.9 Corda suspensa no plano inclinado (EUA) **

Uma corda repousa suspensa por dois planos inclinados de um mesmo ângulo dado por θ. A corda tem uma distribuição homogênea da massa em todo o seu comprimento e seu coeficiente de atrito com a superfície

inclinada é dada por $\mu = 1$. A corda é ajustada de tal maneira que o sistema possui simetria de reflexão esquerda-direita.

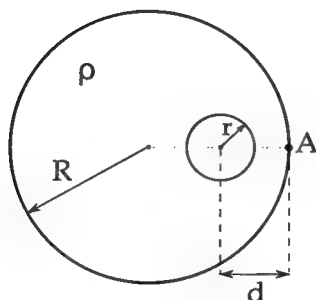
Qual a maior fração f da corda que não toca as plataformas que pode ser obtida em um sistema como esse? Qual o ângulo de θ que possibilita este valor máximo?

1.10 Cavidade em um planeta*

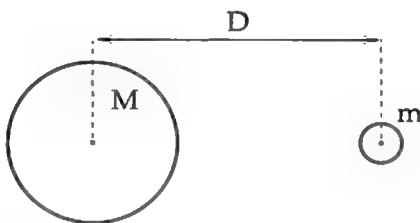
Uma das formas de se detectar a presença de grandes jazidas de recursos minerais no interior da Terra é medir as variações de aceleração local da gravidade, causadas por uma distribuição não uniforme de massa através de gravímetros.

Considere um planeta P perfeitamente esférico de raio R e de densidade volumétrica de massa ρ uniforme, exceto por uma cavidade esférica de raio r cujo centro encontra distante de d da superfície, como mostra a figura a seguir.

Suponha que a cavidade é preenchida por um gás de densidade desprezível.

(a) Calcule a variação relativa da gravidade local $r = (g_0 - g)/g_0$ no ponto A, onde g é a aceleração da gravidade da superfície do planeta P medida pelo gravímetro e g_0 é a aceleração da gravidade se o planeta P não tivesse nenhuma cavidade.

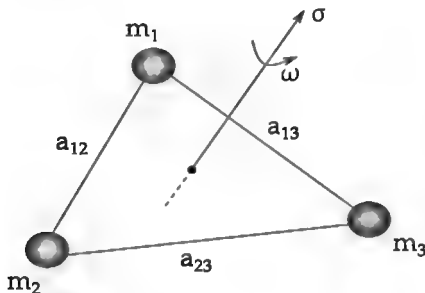
(b) Mostre que o campo gravitacional no interior da cavidade é uniforme.

1.11 Queda livre espacial***

Considere um par de corpos com massas M e m, que interagem apenas gravitacionalmente entre si e podem ser considerados livres de quaisquer outras forças externas. Considere que no instante inicial $t = 0$, em que a distância inicial entre as massas é D, elas foram soltas a partir do repouso.

Considerando que ambos os corpos podem ser tratados como corpos pontuais, calcule:

(a) o tempo necessário para que os corpos se choquem, considerando que $M >> m$.

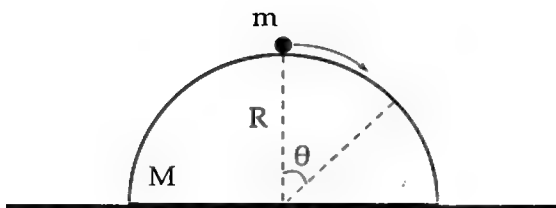
(b) o tempo necessário para que os corpos se choquem para um caso geral em que a razão M/m tem um valor finito conhecido.

1.12 Triângulo planetário (IPhO) ***

Três planetas, cujas massas são dadas por m_1, m_2 e m_3, estão localizados nos pontos não colineares P_1, P_2 e P_3. Eles interagem entre si somente mediante às forças gravitacionais. Os astros estão livres e isolados no espaço, interagindo apenas entre si. Considere σ como sendo o eixo que passa pelo centro de massa dos três corpos e é perpendicular ao triângulo $\Delta P_1 P_2 P_3$.

Qual deve ser a velocidade angular ω do sistema, em relação ao eixo σ, e as distâncias a_{12}, a_{13} e a_{23} para que a forma e o tamanho do triângulo permaneçam inalterados durante o movimento, ou seja, para que o sistema se comporte como um corpo rígido em relação ao eixo σ.

1.13 Iglu (Brasil) **

Uma partícula de massa m é posicionada no topo de uma superfície semiesférica de raio R e de massa M, conforme é mostrado na figura abaixo:

Um leve toque faz com que a partícula comece a deslizar sem atrito sob a ação da gravidade na superfície (veja figura acima). Determine o ângulo θ (medido a partir do topo da superfície) em que a partícula perde contato com a superfície nas seguintes condições:

(a) O coeficiente de atrito entre a superfície horizontal e a superfície de contato da semiesfera é tal que a massa M permanece imóvel durante o movimento da partícula m.

(b) Não há atrito entre a superfície horizontal e a superfície de contato da semiesfera. Nesse caso, basta identificar uma equação que deve ser satisfeita por θ.

1.14 Movimento de um foguete**

O sistema de propulsão de um foguete está intimamente ligado com a terceira lei de Newton. Para acelerar em uma direção arbitrária é necessário lançar uma determinada quantidade de massa na direção oposta. Dessa maneira, o foguete acelera e a sua massa total começa a decrescer. Diferentemente de carros, trens ou navios a variação de massa da corrente da queima de combustível não é desprezível, de tal forma que devemos considerar o foguete como um sistema de massa variável $M(t)$, onde a massa inicial do sisteme é chamada de M_0.

Considere que a taxa de queima de combustível é constante e igual a $\mu = -dm/dt$, durante um determinado intervalo de tempo, e que os gases são expelidos dos propulsores do foguete com velocidade u relativa ao mesmo.

Calcule:

(a) A velocidade V do foguete em função da velocidade de ejeção de combustível u e de suas massas inicial M_0 e final $M(t)$.

(b) A massa do foguete em função do tempo.

1.15 Dinâmica de uma gota de chuva**

Nesse problema vamos discutir, através de um modelo simplificado, o movimento de uma gota de chuva de massa variável. A formação de uma gota se dá a partir de pequenos núcleos de condensação, que podem ser constituídos de pequenas partículas de poeira suspensas na atmosfera. Vamos supor que através desse processo uma pequena gota se forma a partir da condensação do vapor d'água de uma nuvem e inicia o seu movimento de queda sob a ação da gravidade.

A partir do início do movimento, a gota começa a absorver o vapor de água saturado da nuvem, crescendo de tamanho. Vamos supor que a taxa de crescimento da gota por unidade de área e de tempo λ seja constante e que a gota tem o formato esférico.

(a) Mostre que o raio da gota $r(t)$ cresce linearmente com o tempo. Suponha que a nucleação da gota acontece no instante $t = 0$ e que a massa inicial da gota é desprezível.

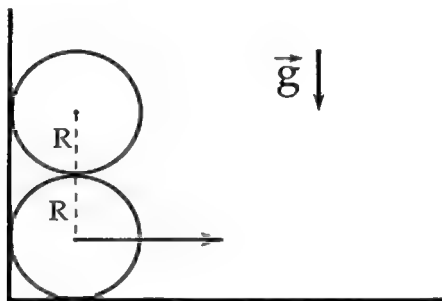
(b) Devido a absorção do vapor d'água disperso na nuvem, a aceleração da gota de chuva não é dada pela aceleração local da gravidade g. Demonstre que a relação entre a aceleração da gota a, sua velocidade v e o tempo decorrido desde o início do movimento t é dado por

$$a = g - \frac{3v}{t}. \qquad (1.2)$$

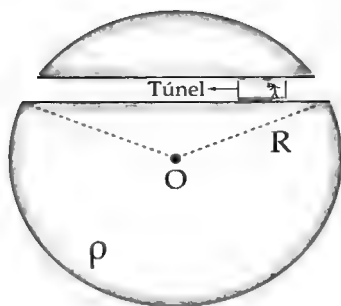
(c) Determine a equação horária da velocidade $v(t)$.

1.16 Deslizamento de Cilindros (Brasil) **

Dois cilindros uniformes e idênticos, de raios iguais a R, são colocados um sobre o outro ao lado de uma parede, como mostra a figura a seguir. A aceleração local da gravidade é dada por g.

Após uma pequena perturbação, o cilindro de baixo inicia um movimento para a direita, o sistema, então, começa a se movimentar. Calcule a velocidade máxima atingida pelo cilindro de baixo. Despreze o atrito entre todas as superfícies.

1.17 Viagem por dentro da Terra*

Considere um meio de transporte hipotético que utiliza a força gravitacional do planeta Terra para fazer viagens através de túneis que atravessam o interior deste. Escava-se um caminho retilíneo entre dois pontos da superfície do planeta e os pacientes viajam em um 'ônibus' através do túnel sob a ação exclusiva do campo gravitacional. Despreze quaisquer dissipações mecânicas do sistema e suponha que o planeta Terra pode ser aproximado por uma esfera de raio R com uma distribuição uniforme de massa ρ.

Calcule o tempo de viagem Δt desse meio de transporte e mostre que esse valor independe dos pontos de origem e destino da viagem.

1.18 Desvio da vertical do pêndulo (Brasil adap.) **

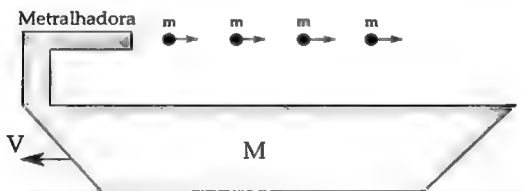
As leis de Newton são válidas apenas para referenciais inerciais. Referenciais inerciais sempre se movem em movimentos retilíneos uniformes com respeito a outros referenciais inerciais, de tal maneira que a mudança de coordenadas de um referencial para o outro mantém as leis de Newton invariantes.

Quando um referencial acelera ou gira com respeito a um referencial inercial, as leis de Newton deixam de valer e o referencial considerado é dito não-inercial. Um exemplo é o referencial do planeta Terra. O movimento de rotação da Terra provoca o aparecimento de forças inerciais, ou forças fictícias. Um pêndulo em repouso deveria estar alinhado com o centro da Terra, porém, devido à ação dessas forças, há um pequeno desvio, com relação à vertical, que depende da latitude onde este é posicionado.

Determine o desvio angular θ com relação ao centro da Terra que aparece num pêndulo posicionado numa latitude ϕ devido à rotação da Terra. Sua resposta poderá estar em função dos ângulos fornecidos, do raio da Terra R, da velocidade de rotação da Terra ω, da massa m do pêndulo e da aceleração gravitacional g na superfície da Terra .

1.19 Barco de guerra (OIbF adap.) **

Em um barco de massa M, inicialmente em repouso, está instalada uma metralhadora. A arma dispara horizontalmente N balas por segundo. Os projéteis são todos idênticos, de massa m e são disparados com velocidade v_0 com respeito ao barco. Considere que a velocidade das balas é sempre muito maior do que a velocidade do barco e que a massa das balas é muito menor que a massa do barco. Considere que o instante $t = 0$ corresponde ao momento do primeiro tiro da metralhadora.

Despreze a resistência que a água exerce sobre o barco.

Calcule:

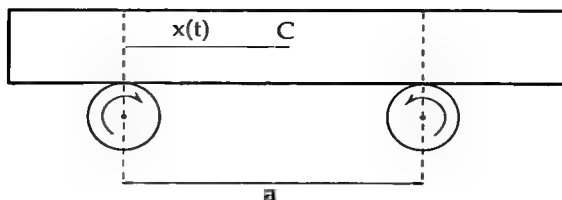
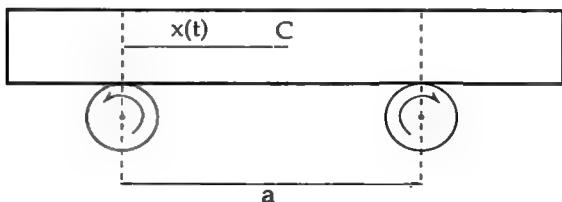
(a) A velocidade do barco $V(t)$.

(b) A distância percorrida pelo barco $d(t)$.

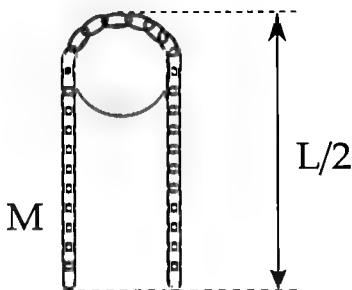
1.20 Cilindros Rolantes*

Uma haste uniforme de massa M e comprimento L é apoiada em um par de cilindros que tem liberdade para girar em ambos os sentidos. O coeficiente de atrito entre a haste e cada um dos cilindros é μ. A posição da haste é tomada como a posição do seu centro de massa e a origem é tomada como equidistante de ambos os cilindros.

(a) Assuma que os cilindros girem em sentidos opostos, conforme a figura, e que a haste está inicialmente em repouso e deslocada

de $x(0) = x_0$ da posição de equilíbrio. Descreva o movimento da haste calculando $x(t)$.

(b) Assuma agora que os cilindros continuem girando em sentidos opostos, mas de forma inversa ao item (a). Considerando que a haste está inicialmente em repouso e deslocada de $x(0) = x_0$ da posição de equilíbrio, calcule $x(t)$.

1.21 Corrente na polia**

Considere uma corrente de massa M, distribuída uniformemente em cada um de seus elos, e comprimento L, equilibrada de forma simétrica em uma polia, como se pode ver na figura a seguir.

Uma perturbação na corrente é feita e ela começa a deslizar para um de seus lados. A corrente inicia um movimento até chegar um instante em que a polia e a corrente perdem o contato. Considerando esse instante, calcule:

(a) A força de tração na porção da corda em contato com a polia em função de M, L e da sua velocidade v.

(b) Calcule a posição e a velocidade da corrente quando esta perde o contato com a polia.

1.22 Colisões bidimensionais (Brasil) **

Um corpo de massa m_1 colide elasticamente com um corpo em repouso de massa m_2, sendo que após a colisão ambos os corpos se movimentam com ângulos θ_1 e θ_2 em relação à direção original de m_1. Mostre que:

(a) Se $m_1 = m_2$, então

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_2; \tag{1.3}$$

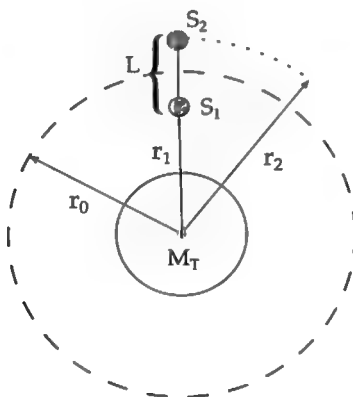
(b) Se $m_1 > m_2$, o valor máximo de θ_1 é expresso por

$$\theta_{max} = arcsen\left(\frac{m_2}{m_1}\right); \tag{1.4}$$

(c) Se $m_1 << m_2$, então

$$\theta_1 \approx \pi - 2\theta_2. \tag{1.5}$$

1.23 Satélite em formato de haltere (OIbF adap.)**

Considere dois satélites S_1 e S_2, ambos de massa igual a $M = 500$ kg. Os satélites, que orbitam em torno da Terra, estão ligados por um cabo condutor de comprimento $L = 50$ km e massa desprezível. Considera-se que a Terra é uma esfera de massa M_T. O centro de massa do sistema de satélites encontra-se a uma distância r_0 do centro da Terra.

Ao longo de todo este problema iremos supor que o movimento orbital dos dois satélites ocorre num único plano que passa pelo equador terrestre e que estes satélites podem ser aproximados como massas pontuais.

Parte I
Suponha, nessa parte, que o movimento dos satélites S_1 e S_2 é tal que o prolongamento da linha que os une (e que coincide com a direção do cabo que os mantém unidos) passa sempre pelo centro da Terra. Calcule:

(a) a velocidade angular do sistema em torno da Terra.

(b) a tensão no cabo que une os satélites.

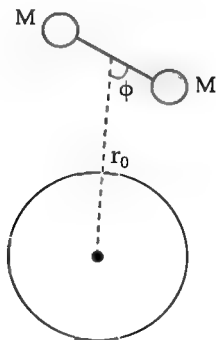
Parte II

Para um observador fixo com um objeto numa órbita estável, a força de inércia (fictícia ou aparente) equilibra a força da gravidade. No sistema estudado, as forças estão equilibradas no centro de massa. Porém, na esfera mais afastada da Terra a força de inércia é superior à força da gravidade. Daí resulta que um objeto nela localizado sentirá uma força efetiva de sentido oposto ao da gravidade terrestre (gravidade artificial).

(c) Obtenha a expressão analítica dessa força fictícia para um objeto de massa m localizado no interior do satélite S2.

(d) Mostre que essa força efetiva, resultado da soma da força fictícia com a força gravitacional, é aproximadamente proporcional ao comprimento do cabo L.

Parte III

Considere agora que o cabo forma um ângulo com a direção radial à Terra, tal como se mostra a figura a seguir.

(e) Determine o valor do ângulo ϕ para o qual o sistema se encontra numa orientação em equilíbrio estável. Justifique.

(f) Determine a frequência de oscilação do sistema quando é ligeiramente afastado da sua posição de equilíbrio.

1.24 Potencial Efetivo **

Um resultado conhecido na mecânica é que toda força central, associada a uma energia potencial $V(r)$, conserva momento angular com respeito ao centro de forças. Esse resultado pode ser utilizado para descreve, de maneira simplificada, o movimento de um corpo sujeito a uma força central. Faça o que se pede.

(a) Mostre que a conservação do momento angular $\vec{L}$ garante que o movimento de um corpo sujeito a uma força central está contido em um plano. Esse resultado garante que o movimento do corpo pode ser completamente descrito por um par de coordenadas polares $r(t)$ e $\theta(t)$.

(b) Decomponha a velocidade $\vec{v}$ de um corpo nas suas coordenadas radial v_r e angular v_θ. Deixe sua resposta em função do momento angular L, da coordenada radial $r(t)$ e suas derivadas temporais.

(c) Mostre que a energia total do sistema pode ser escrita como

$$E = \frac{1}{2}mv_r^2 + V_{ef}(r), \tag{1.6}$$

onde $V_{ef}(r)$ representa um 'potencial efetivo' radial, que é dado por

$$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}. \tag{1.7}$$

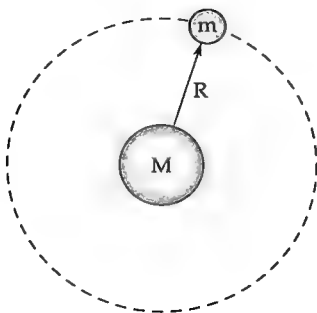
Esse resultado garante que a dinâmica radial do corpo pode ser descrita com o auxílio de um movimento unidimensional de potencial efetivo $V_{ef}(r)$.

1.25 Perturbação de órbita***

Parte I - Perturbação da órbita circular no vácuo

Considere nesse problema um planeta de massa m que orbita uma estrela de massa M com uma trajetória circular de raio R.

(a) Determine o período de uma volta do planeta ao redor da estrela.

(b) Considere que, devido a uma colisão com um grande meteoro, o movimento do planeta sofreu uma pequena perturbação, adquirindo uma velocidade radial. Determine o período das oscilações radiais observadas. Compare o resultado obtido com o do item anterior e faça uma conclusão a respeito da trajetória do planeta.

Parte II - Efeito de uma nuvem de poeira

Considere nesse problema um planeta de massa m que orbita uma estrela de massa M com uma trajetória circular de raio R, mas agora dentro de uma grande nuvem de poeira de densidade μ.

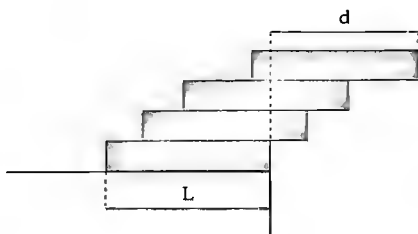
(c) Determine o período de uma volta do planeta ao redor da estrela na nuvem.

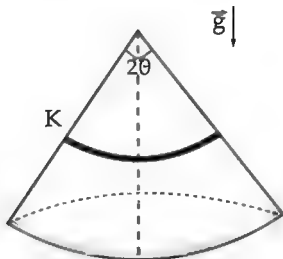
(d) Considere uma mesma colisão com um meteoro, que uma pequena perturbação radial na velocidade do planeta de massa m. Determine o período das oscilações radiais observadas após a colisão.

(e) No caso de não existir um número racional que relacione os dois períodos encontrados nos itens anteriores, a trajetória do corpo não é mais fechada. Para pequenas oscilações podemos aproximar a trajetória como uma elipse com uma velocidade de precessão Ω. Calcule Ω.

1.26 Pilha de tijolos*

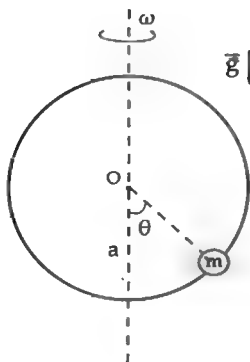
Observe a figura a seguir. Nela está representada uma pilha de N=4 blocos idênticos de comprimento L. Os blocos têm uma distribuição homogênea de massa de tal forma que o seu centro de massa coincide com o seu centro geométrico. Os blocos são arranjados de tal maneira que a distância entre as extremidades direitas do primeiro e do último bloco empilhado é dada por d.

Demonstre que sempre é possível arranjar um conjunto de blocos de tal forma que a distância d entre a extremidade do primeiro e do último bloco arbitrariamente seja grande sem que a pilha desabe, bastando que N seja suficientemente grande e que os blocos sejam empilhados de forma adequada.

1.27 Cordão elástico*

Um cordão elástico tem massa e constante de elasticidade K. Quando relaxado ele tem o comprimento correspondente a uma circunferência de raio r. O cordão é colocado horizontalmente em uma superfície cônica livre de atrito, como mostra a figura, o ângulo de abertura do cone é de 2θ. A aceleração local da gravidade é g.

(a) Qual o raio do cordão na posição de equilíbrio de forças?

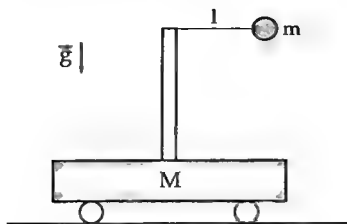
(b) Determine o período de pequenas oscilações verticais do cordão elástico na superfície cônica em torno da posição de equilíbrio calculada no item anterior.

1.28 Conta no aro girante**

Uma pequena conta de massa m desliza livre de atrito em um aro circular rígido de raio a. O aro permanece em um plano vertical, que gira com velocidade angular ω, veja a figura. Faça o que se pede nos itens a seguir.

(a) Para velocidades angulares superiores a um valor crítico ω_c, a conta pode realizar pequenas oscilações em torno de um ângulo de equilíbrio θ_0. Determine ω_c e θ_0.

(b) Determine o período das oscilações em torno de θ_0. Deixe sua resposta em função de ω e ω_c.

1.29 Pêndulo no carrinho**

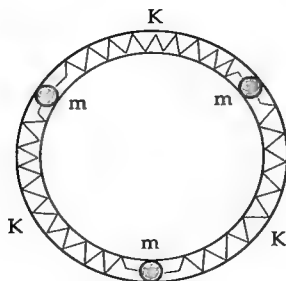
O bloco de massa M é livre para deslocar-se em um plano horizontal livre de qualquer atrito. No topo do carrinho está presa uma haste de massa desprezível em que se amarra uma corda de comprimento l, que também está amarrada a uma massa m.

Faça o que se pede nos itens a seguir.

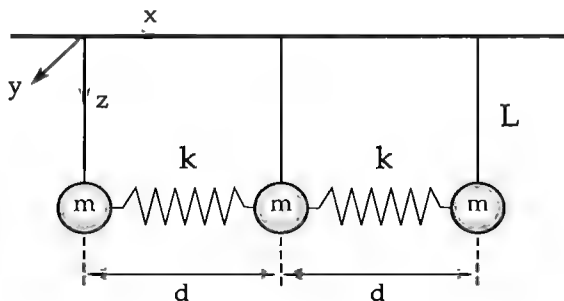
(a) Considerando que o estado inicial do sistema corresponde à massa m em uma posição horizontal com velocidade nula e com a corda esticada, determinar qual a máxima tensão da corda durante o movimento.

(b) Determinar a frequência angular ω de pequenas oscilações desse sistema em torno da posição de equilíbrio estável do sistema.

1.30 Oscilações Acopladas I (IPhO adp.)**

Nesse exercício é apresentado um problema clássico de oscilações acopladas, em que existem um conjunto de corpos oscilando de maneira não independente. Em sistemas desse tipo, é possível definir um conjunto de frequências naturais associadas a determinados padrões de oscilação, conhecidos como modos normais.

Considere três massas idênticas de valor m conectadas entre si por três molas de constante elástica k, também idênticas entre si. As molas e massas são arranjadas em um volante circular, conforme a figura a seguir. Calcule as frequências naturais do sistema e os seus respectivos modos normais de oscilação.

1.31 Oscilações acopladas II (Brasil)**

Neste problema estamos interessados em analisar um conjunto de três pêndulos simples acoplados entre si por cordas ou fios tensionados, como será indicado adiante. A figura a seguir ilustra os três pêndulos, constituídos de hastes rígidas de massas desprezíveis, com esferas pontuais de massa m, situadas em suas extremidades e ligadas por molas de constante elástica k. A aceleração local da gravidade é g. Cada massa dista de sua vizinha por uma distância d e o comprimento dos fios é L. Na figura também estão indicados possíveis eixos cartesianos que poderão ser utilizados na solução do problema.

(a) Determine o maior número de graus de liberdade do sistema

indicado acima, descrevendo-os claramente.

É possível mostrar que se as massas executarem pequenas oscilações em torno do equilíbrio, cada um dos graus de liberdade contribui com uma frequência angular ω característica. Essas frequências angulares são chamadas de frequências normais de vibração do sistema e a cada uma está associado um perfil de vibração característico, que é chamado de modo normal de vibração.

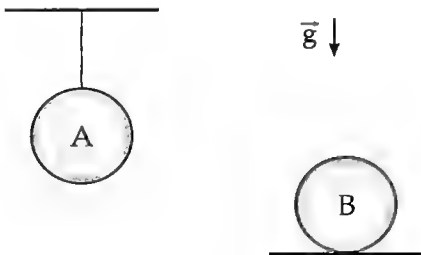
(b) Para o sistema indicado na Figura 1 com molas ligando as massas, determine as frequências normais de vibração caso o sistema seja articulado para se movimentar somente no eixo x. Quantos e quais são os modos neste caso?

(c) Considerando agora que as molas sejam trocadas por fios ideais tracionados por uma tração T, e que as hastes estão articuladas de forma que as massas só possam se movimentar no eixo y, determine os modos normais de vibração do sistema. Quantos e quais são os modos neste caso?

2

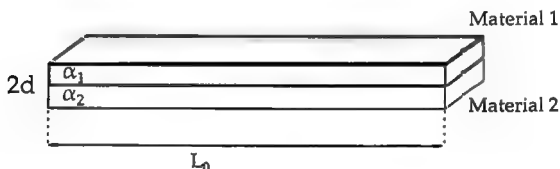
Termodinâmica

2.1 Aquecimento de duas esferas (IPhO)*

Considere duas bolas de massa m, feitas de um material de coeficiente de dilatação linear α e capacidade térmica C, homogêneas e idênticas, A e B, com a mesma temperatura inicial T_0. Uma delas está apoiada em um plano horizontal, enquanto a outra está pendurada por uma corda, como mostram as figuras a seguir. A mesma quantidade de calor Q é fornecida a ambas as bolas. Despreze quaisquer eventuais perdas de calor para o ambiente.

Ao fim do processo de aquecimento, as esferas terão temperaturas

exatamente iguais? Justifique sua resposta e, no caso de resposta negativa, calcule a diferença de temperatura em função dos parâmetros físicos que julgar convenientes.

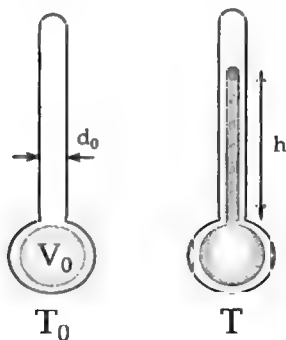
2.2 Tira bimetálica**

Alguns termostatos são baseados em tiras bimetálicas. Esse tipo de sistema é composto por duas finas tiras de espessura d feitas de materiais com coeficientes de dilatação distintos α_1 e α_2 presas uma a outra. A diferença de coeficientes de dilação dos dois metais que compõem a liga bimetálica faz com que variações de temperatura encurvem a lâmina, fazendo com que ela adquira um raio de curvatura R.

Essa mudança no perfil da lâmina bimetálica, causada por variações de temperatura, pode ser usada para realizar ou desfazer contatos elétricos. Dessa maneira, temos uma forma de criar circuitos elétricos cujo comportamento depende da temperatura, medida pelo perfil da lâmina metálica.

Considere uma tira bimetálica perfeitamente reta a temperatura inicial T_0. Nessa condição o seu comprimento é dado por L_0. Calcule a curvatura da lâmina k, definida como sendo o inverso do raio de curvatura R, em função de uma variação de temperatura ΔT imposta a partir de T_0.

2.3 Termômetro de mercúrio*

Um dos tipos de termômetros mais comuns é o feito a base de mercúrio. O funcionamento desse tipo de termômetro é baseado na diferença da dilatação térmica do mercúrio e do material que o termômetro é feito. O mercúrio é escolhido por ser um metal líquido à temperatura ambiente.

Um termômetro desse tipo é composto de um bulbo, onde encontra-se acumulado boa parte do mercúrio, e de um tubo capilar de paredes de vidro pela qual o mercúrio passa quando dilata. Considere que, a temperatura T_0, o volume de mercúrio no seu interior é dado por V_0, que por sua vez é igual ao volume do bulbo do termômetro. Nessa temperatura, a secção transversal de área do tudo vale S_0.

Seja β o coeficiente de dilatação volumétrica do mercúrio e α o coeficiente de dilatação linear do vidro do qual as parede do termômetro são feitas. Calcule a altura da coluna de mercúrio h para uma temperatura $T > T_0$.

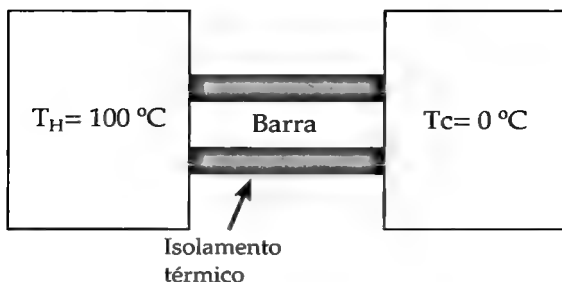
2.4 Esfera na água aquecida*

Considere dois recipientes, cada um contendo uma massa m de água no seu interior. Uma esfera metálica, também de massa m, é submergida dentro de um dos recipientes e suspensa por uma corda feita de um material com condutividade térmica desprezível.

Os dois sistemas são aquecidos até o ponto de ebulição da água e iniciam o seu processo de resfriamento espontâneo até a temperatura ambiente novamente. Sabendo que o recipiente com a esfera metálica submersa demora k vezes mais tempo para se resfriar que o outro recipiente, calcule o calor específico c do metal em função de k e do calor específico da água c_w. Considere a densidade da esfera metálica muito maior do que a da água.

2.5 Condutividade térmica de barras*

Considere dois reservatórios térmicos: um frio, com uma mistura de água e gelo em equilíbrio térmico a $T_C = 0^oC$, e o outro quente, com água fervente a $T_H = 100^oC$. Esses reservatórios térmicos são termicamente isolados, a não ser por uma barra de um determinado material que promove a condução de calor do reservatório quente para o frio.

Em um experimento, a barra utilizada para essa conexão foi de cobre, levando um tempo $t_1 = 20$ min para que o gelo derretesse completamente.

Em um segundo experimento, utilizou-se uma barra de aço para derreter a mesma quantidade de gelo que antes, sendo necessários $t_2 = 60$ min para a realização dessa tarefa.

Quanto tempo será necessário para derreter essa mesma quantidade de gelo se as barras forem usadas em série? E em paralelo?

2.6 Chapas de aço no Sol**

Uma fina chapa de aço é suspensa e exposta ao Sol, cujos raios de luz incidem na placa, aquecendo-a. A face exposta ao Sol tem uma temperatura de 360 K, enquanto a face sombreada tem uma temperatura de 340 K. A temperatura ambiente é de 300 K. Estime qual seriam as temperaturas nas duas referidas faces da chapa metálica caso a sua espessura duplicasse. Assuma que nesse caso a temperatura ambiente e a incidência solar permanecem inalteradas e despreze perdas pelas superfícies laterais da placa.

2.7 Congelamento de um lago**

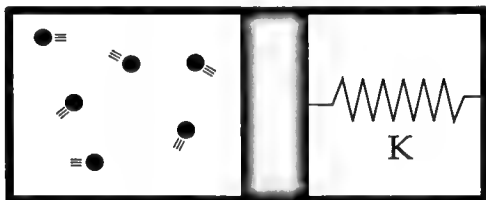
Considere um lago localizado em um país de invernos rigorosos, com temperaturas $T < 0^oC$, de tal forma que o lago inicia um processo de congelamento. À medida que o lago perde calor para o ambiente, uma

fina camada de gelo se forma em sua superfície e vai se tornando mais espessa conforme o lago vai congelando.

Para a sorte das formas de vida aquáticas nas regiões frias da Terra, o gelo é menos denso que a água e não é um bom condutor térmico. Dessa maneira, a camada de gelo que se forma na superfície do lago isola-o termicamente do ambiente e o processo de congelamento se torna cada vez mais lento, de tal forma que é extremamente difícil o congelamento completo da água.

Seja k a condutividade térmica do gelo, ρ a sua densidade e L seu calor latente de fusão. Estime qual o tempo necessário para congelar completamente um lago de profundidade constante h. Considere que a água do lago está a 0^oC.

2.8 Sistema com pistão ligado a uma mola**

Um recipiente é dividido por um pistão de área S, que está livre para se movimentar sem atrito. A parte da esquerda é preenchida com um mol de gás monoatômico, enquanto a parte direita do recipiente encontra-se evacuada de gás. O pistão é conectado à parede da direita por meio de uma mola de constante elástica K, cujo comprimento livre é igual ao tamanho total do recipiente.

Parte I - Cálculo de calor específico do sistema (Brasil)

(a) Determine a capacidade C térmica do sistema. Considere R como sendo a constante dos gases ideais.

Parte II - Oscilações térmicas

Dada uma condição de temperatura, um sistema como esse caminha para uma condição de equilíbrio mecânico estável. Sabendo que a massa do pistão é m, determine o período de oscilação da posição do pistão, no limite de pequenas perturbações, em duas situações:

(b) As transformações gasosas decorrentes do movimento do pistão podem ser consideradas isotérmicas.

(c) As transformações gasosas decorrentes do movimento do pistão podem ser consideradas adiabáticas.

2.9 Estrangulamento de tubo (OIbF) *

Um tubo cilíndrico com um estrangulamento tem duas seções transversais de áreas diferentes A_1 e A_2, com $A_1 > A_2$. Nesse tubo são encaixados dois êmbolos de áreas A_1 e A_2, ligados por um fio inextensível, como mostrado na figura a seguir. Os pistões podem deslizar sem atrito nas tubulações. A massa combinada dos dois êmbolos e o fio é m.

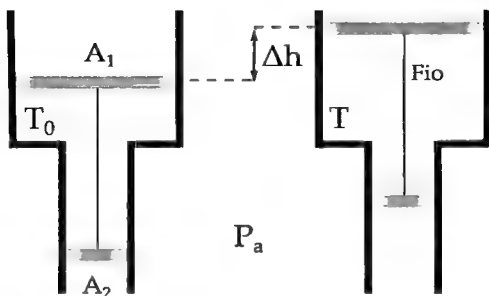
No lado de fora dos tubos existe ar à pressão atmosférica P_a, o volume inicialmente ocupado pelo gás no interior do tubo é V_0 e sua temperatura inicial é T_0.

Responda os itens a seguir.

(a) Qual é a pressão P do gás entre os êmbolos?

(b) Determinar a elevação Δh dos pistões em função do aumento da temperatura ΔT do gás, quando o sistema atinge o equilíbrio.

2.10 Transformação gasosa irreversível*

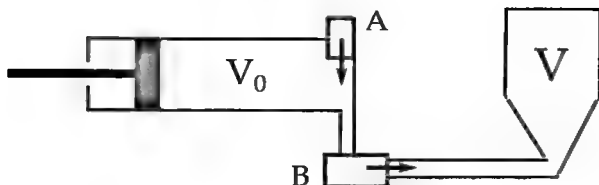
Uma certa quantidade de gás hélio é colocada em um recipiente cilíndrico de paredes diatérmicas. O gás é confinado por um êmbolo de

massa desprezível e encontra-se livre para se mover sem atrito com as paredes do cilindro. O sistema está inicialmente em equilíbrio termodinâmico com a sua vizinhança.

Inicia-se um processo de expansão do gás, o êmbolo é lentamente movido por uma força externa até uma altura H, acima do que se encontrava inicialmente. Como essa expansão é feita lentamente, pode-se supor que o gás esteja sempre em equilíbrio térmico com a vizinhança.

Após o processo descrito, as paredes do cilindro são revestidas de um material que não permite trocas de calor e o êmbolo é liberado para se mover. Após voltar ao repouso, qual a posição final do êmbolo? Escreva sua resposta em função de H e da altura inicial h do êmbolo.

2.11 Bomba de de gás (IME) **

Pretende-se colocar ar sob pressão em um reservatório de volume V. A operação se faz isotermicamente. Utiliza-se uma bomba mostrada na figura a seguir, onde as válvulas A e B impedem o fluxo de ar no sentido inverso ao indicado pelas setas. O volume da câmara de ar da bomba descomprimida (à pressão atmosférica) é V_0.

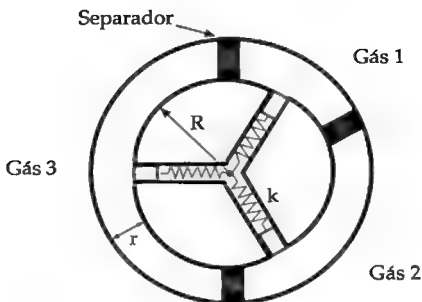
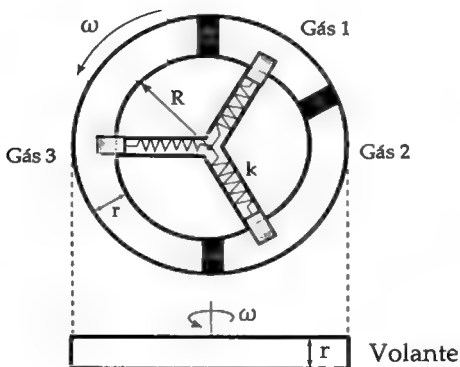
(a) Estando inicialmente o reservatório à pressão atmosférica, determine a expressão da pressão no reservatório de volume V após N

compressões da bomba;

(b) Voltando à condição inicial, considere agora as compressões da bomba como adiabáticas e determine a expressão da pressão absoluta no reservatório após N compressões da bomba.

Calcule suas respostas em função das variáveis P_{atm} , V, V_0, N e γ.

2.12 Volante oco com gases (OIbF) ***

A figura apresenta uma roda oca de seção transversal quadrada de lado r e raio interior R. A cavidade da roda está dividida por três separadores, de tal forma que os volumes que delimitam a relação estão na proporção 1:2:3. As câmaras estão ocupadas por três gases ideais diferentes.

No interior da roda, existem três molas de constante elástica k que se acham em compartimento radiais ocos no vácuo ligadas a pistões idênticos. Os separadores podem deslocar-se sem atrito, são muito finos e de massa desprezível. Os pistões são idênticos de massa M, seção transversal quadrada de lado r e se ajustam hermeticamente em seus compartimentos. Seus extremos superiores são de raio de curvatura R. Com a roda em repouso, seus centros de massa se acham a uma distância $R - r/2$, medida desde o centro da roda. (Se não houvesse nenhum gás dentro da roda, os pistões alcançariam a parede externa da mesma e as molas não estariam comprimidas nem esticadas).

Se o dispositivo gira com velocidade angular constante ao redor de um eixo vertical e supondo que todo o sistema se mantenha a temperatura constante:

(a) Determine a relação entre as pressões dos gases.

(b) Determine a relação entre os volumes dos gases.

(c) Determine a equação que deve ser satisfeita pela distância que os pistões penetram no interior das câmaras da roda.

(d) Determine as variações das posições angulares dos separadores.

2.13 Gases Ideais (Canadá) **

Sejam A e B dois cilindros de volume igual a V, contendo o mesmo gás ideal à temperatura T e em pressões $2P$ e P, respectivamente. A válvula que conecta os dois cilindros é ligeiramente aberta e, havendo vazamento de gás de A para B, a pressão em A é mantida em $2P$, fazendo uso de um pistão móvel. O processo continua até que o gás no cilindro B também está em $2P$. Considere que há um bom contato térmico entre os cilindros e um isolamento térmico da vizinhança. A capacidade calorífica molar do gás a volume constante é $c_{v,m} = \frac{3}{2}R$, onde R é constante universal dos gases. Determine:

(a) O volume final de gás no cilindro A, em termos de V.

(b) A temperatura final em termos de T.

2.14 Relação de Mayer e aquecimento de gás (Brasil) *

(a) Para um gás ideal, mostre que o calor específico molecular a volume constante (c_v) e a pressão constante (c_p) estão relacionados pela relação de Mayer:

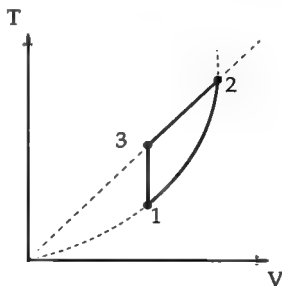
$$c_p = c_v + k_b \tag{2.1}$$

onde k_b é a constante de Boltzman.

(b) Considere um gás ideal monoatômico a temperatura e pressão respectivas de $T_0 = 300$K e $P_0 = 1.10^5$ Pa. Um laser pulsado é focalizado na amostra de gás e transfere a esta uma energia E para um pequeno volume V em 10^{-9} segundos. Se não há aumento de

volume durante este curto período de tempo, mostre que a pressão varia de $\Delta P = (\gamma - 1)\frac{E}{V}$ e a temperatura em $\Delta T = \frac{T_0}{P_0}(\gamma - 1)\frac{E}{V}$, onde $\gamma = c_p/c_v$.

2.15 Ciclo Térmico *

Um mol de hélio segue o ciclo 1-2-3-1, mostrado no diagrama. Durante o processo 1-2 a temperatura do gás depende do volume segundo a equação $T = bV^2$, onde b é uma constante física de dimensões apropriadas. Durante o ciclo, a temperatura máxima atingida pelo gás é quatro vezes maior que a menor temperatura atingida.

Sabendo que na fase 1-2 do ciclo o gás absorve uma quantidade Q de calor, quanto calor Q' é liberado pelo gás no caminho 2-3-1?

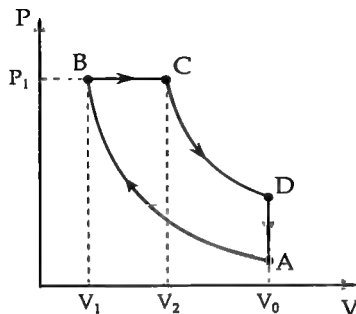
2.16 Rendimento do ciclo Diesel*

Na figura a seguir representa-se o ciclo térmico Diesel. Esse ciclo térmico é composto de 4 tempos:

1. $A \rightarrow B$: Compressão adiabática do gás;

2. $B \rightarrow C$: Expansão isobárica do gás;

3. $C \to D$: Expansão adiabática do gás;

4. $D \to A$: Resfriamento isocórico.

Nesse ciclo, definimos as taxas de compressão adiabática $r_c = V_0/V_1$ e a taxa de expansão adiabática $r_e = V_0/V_2$. O coeficiente de Poisson do gás utilizado no ciclo é γ. Mostre que o rendimento η do ciclo é dado pela expressão

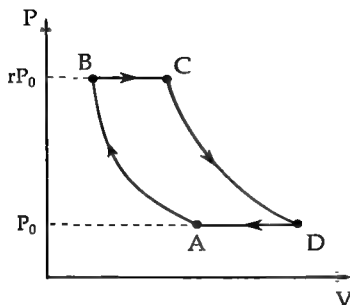
$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{(1/r_e)^\gamma - (1/r_c)^\gamma}{(1/r_e) - (1/r_c)}. \quad (2.2)$$

2.17 Rendimento do ciclo Joule*

Na figura a seguir representa-se o ciclo térmico Joule. Esse ciclo térmico é composto de 4 tempos:

1. $A \to B$: Compressão adiabática do gás:

2. $B \to C$: Expansão isobárica do gás;

3. $C \to D$: Expansão adiabática do gás;

4. $D \rightarrow A$: Compressão isobárica do gás.

Nesse ciclo, definimos a taxa de compressão $r = \frac{P_B}{P_A}$. O coeficiente de Poisson do gás utilizado no ciclo é γ. Mostre que o rendimento η do ciclo é dado pela expressão

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tag{2.3}$$

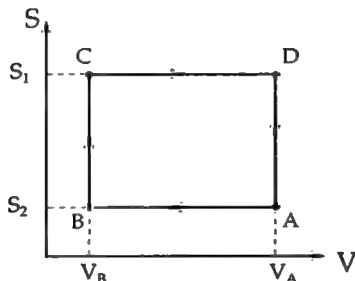
2.18 Rendimento do motor a gasolina*

A operação de um motor a gasolina é aproximadamente igual a um ciclo de Otto, representado no diagrama S versus V, mostrado na figura a seguir.

1. $A \rightarrow B$: Compressão isentrópica do gás;

2. $B \rightarrow C$: Aquecimento isocórico do gás (correspondente a combustão da gasolina);

3. $C \rightarrow D$: Expansão isentrópica do gás (onde acontece a realização de trabalho);

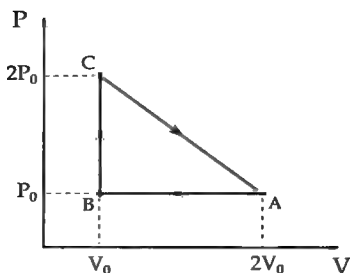
4. $D \to A$: Resfriamento isocórico.

Considerando que as transformações do ciclo são reversíveis, mostre que a eficiência η do ciclo Otto para um mol de gás ideal, operando no ciclo descrito em função da razão $r = V_A/V_B$ e coeficiente de Poisson γ, é dada por

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1}. \tag{2.4}$$

2.19 Ciclo térmico de 3 estados **

Um gás monoatômico ideal realiza a transformação cíclica descrita pelo diagrama $P - V$ a seguir.

(a) Determine a eficiência deste processo termodinâmico.

(b) Compare o resultado do item anterior com uma máquina de Carnot operando entre as temperaturas extremas no ciclo.

2.20 Variação de entropia de um gás (Brasil adp.) **

Dois gases perfeitos idênticos, com a mesma pressão e mesmo número de partículas, estão confinados em dois recipientes com volumes V_1 e V_2 e com temperaturas T_1 e T_2, respectivamente. Os dois recipientes são conectados e o sistema tende ao equilíbrio.

(a) Calcule a pressão e temperatura do sistema quando o equilíbrio é atingido.

(b) Encontre a variação da entropia do sistema nesse processo.

2.21 Pressão de uma atmosfera isotérmica**

(a) Mostre que a variação de pressão atmosférica com a altidude (dp/dz) depende da densidade do ar ρ e da aceleração local da gravidade g segundo a equação

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \tag{2.5}$$

(b) Supondo que a atmosfera tenha temperatura constante T, mostre

que a pressão atmosférica depende exponencialmente da altitude

$$p(z) = p_0 e^{\lambda z}, \tag{2.6}$$

e calcule o valor do parâmetro λ.

2.22 Pressão atmosférica em uma nave espacial**

Uma estação espacial é composta por um grande cilindro de raio R_0 cheio de ar. O cilindro gira sobre o seu eixo de simetria a uma velocidade angular Ω, criando uma "gravidade artificial" na borda do cilindro igual a g, com o objetivo de simular as condições de vida terrestres no espaço sideral. Supondo que a temperatura T é constante dentro a estação, calcule a razão entre a pressão do ar no centro da estação e a pressão na borda.

2.23 Nuvem de gás quente*

Uma nuvem quente e esfericamente simétrica de um gás ideal encontra-se no espaço sideral. O gás tem uma densidade de massa no equilíbrio dado por

$$\rho(r) = \rho_0 r^{-2}. \tag{2.7}$$

Determine como varia a temperatura da nuvem de gás.

2.24 Uma troca de Calor Diferente (Brasil) ***

Imagine um corpo ideal, que não muda sua massa ou volume, que possui capacidade térmica dada por $C(T) = aT^n$, onde a é um constante

e T a temperatura absoluta do corpo.

(a) No caso em que $n = 0$, ou seja, a capacidade térmica do corpo é constante, mostre que sua energia interna $U(T)$ e sua função entropia $S(T)$ são dadas por:

$$U(T) = U_0 + aT \quad \text{e} \quad S(T) = S_0 + a\ln(T), \tag{2.8}$$

onde U_0 e S_0 são constantes de integração.

(b) Se dois corpos deste tipo, um à temperatura T_1 e outro à temperatura T_2, forem colocados em contato e levados ao equilíbrio térmico, determine qual a maior quantidade de trabalho possível que pode ser retirada do sistema.
A partir de agora, considere o caso em que $n \neq 0$.

(c) Determine a função entropia $S(T)$ e a função energia interna $U(T)$ neste caso.

(d) Caso dois corpos como esse, um à temperatura T_1 e outro à temperatura T_2 sejam postos em contato até o equilíbrio térmico, qual a maior quantidade de trabalho que pode ser retirada desse sistema?

2.25 Gás não-ideal (EUA) ***

Considere um gás não-ideal com energia interna U dada por $U = 3PV$, em que P e V são a pressão e o volume do gás, respectivamente.

(a) Encontre uma relação entre P e V para um processo adiabático.

Experimentos mostram que a temperatura T do gás depende apenas da pressão P, independentemente do volume. A escala de temperatura

pode ser fixada ao ajustar $T = 1$ quando $P = 1$. Considere o seguinte processo de Carnot:

$$(P_1, V_1) \xrightarrow{T=cte.} (P_2, V_2) \xrightarrow{Q=0} (P_3, V_3) \xrightarrow{T=cte.} (P_4, V_4) \xrightarrow{Q=0} (P_1, V_1)$$

(b) Calcule o calor Q_1 absorvido pelo gás no primeiro processo isotérmico.

(c) Calcule o calor Q_2 absorvido pelo gás no segundo processo isotérmico.

(d) A temperatura T pode ser definida tal que

$$\frac{T_1}{T_2} = -\frac{Q_1}{Q_2}. \tag{2.9}$$

Encontre a relação entre P e T.

(e) Encontre a capacidade calorífica a volume constante do gás.

(f) Encontre a entropia S do gás em termos de P e V, dado que $S = 0$ e $T = 0$.

2.26 Distribuição de probabilidade de velocidades de Maxwell**

Mecânica estatística é um ramo da física que explica o comportamento de um número elevado de entidades através de modelos físicos que envolvem técnicas estatísticas. Entre diferentes técnicas de estatística está a função de distribuição de probabilidade, usaremos como exemplo nesse problema a distribuição de Maxwell-Boltzmann para velocidades. Essa função de distribuição associa a probabilidade $F(v)dv$ de se encontrar uma partícula com uma velocidade dentro do intervalo $[v, v + \Delta v]$ a cada valor de v. Matematicamente temos que

$$dP = F(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right), \qquad (2.10)$$

onde m é a massa das partículas consideradas e T é a temperatura com a qual o sistema está em equilíbrio térmico.

(a) Verifique a condição de normalização da probabilidade total da função de distribuição de Maxwell.

(b) Qual a velocidade mais provável de se encontrar uma partícula?

(c) Qual o valor da velocidade média das partículas?

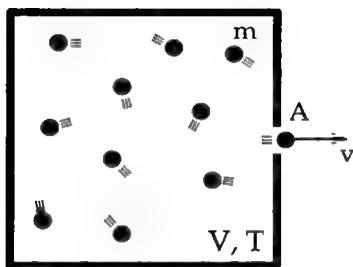
(d) Qual o valor da velocidade quadrática média $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$?

Integrais úteis:

$$\int_0^\infty x^2 \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\int_0^\infty x^4 \exp(-x^2)dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$

2.27 Vazamento de gás**

Um gás ideal de átomos de densidade volumétrica de partículas n, a uma temperatura T, está confinado em um recipiente termicamente isolado de volume V, que tem um pequeno orifício de uma superfície em uma das paredes, como mostra a figura a seguir. Suponha uma distribuição de velocidades de Maxwell para os átomos de massa m. As dimensões do orifício, cuja área é dada por A, são muito menores do que o tamanho do recipiente e que o percurso livre médio dos átomos.

(a) Calcule o número de átomos que colidem na parede do recipiente por unidade de área e por unidade de tempo. Expresse sua resposta em termos da velocidade média $\bar{v}$ das partículas gasosas.

(b) Considerando que o gás troca calor com a vizinhança e mantém sua temperatura constante igual a T. Estime quanto tempo é necessário para que a metade das moléculas do gás saia do recipiente.

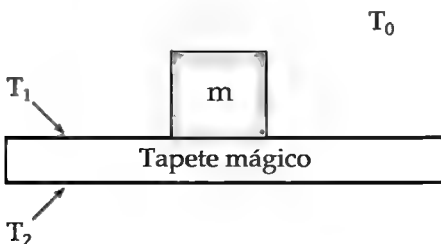
2.28 Caixa de fótons (Canadá) ***

Um gás ideal composto por fótons está em uma caixa de dimensões $L \times L \times L$. A pressão, o volume e a energia total do gás são dados pelas variáveis de estado P, V e U, respectivamente. O fóton carrega uma quantidade de momento p e uma quantidade de energia E. Essas duas quantidades físicas se relacionam conforme a equação $E = pc$.

Mostre que um gás de fótons satisfaz a seguinte equação de estados

$$PV = \frac{U}{3} \tag{2.11}$$

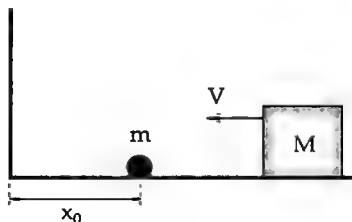
2.29 Tapete mágico***

Um estudante de física pensou em um novo tipo de aeronave, o "tapete mágico". A superfície superior do tapete é mantida a uma temperatura constante T_1 e a superfície inferior, a uma temperatura $T_2 > T_1$. Veja a figura a seguir. O estudante de física argumentou que, durante a colisão com a superfície quente, as moléculas de ar adquiririam maiores velocidades e, portanto, transfeririam um impulso igual para o tapete.

(a) Estime a pressão que um gás com partículas de massa m e densidade volumétrica n, mantido a uma temperatura T_0, exerce sobre uma superfície plana de temperatura T_1. Utilize a velocidade quadrática das partículas como uma velocidade típica observada.

(b) Supondo que as temperaturas das superfícies superior e inferior do tapete de área $A = 1$ m^2 são $T_1 = 0$ °C e $T_2 = 100$ °C, respectivamente, enquanto a temperatura do ar é mantida em $T_0 = 20°C$. Supondo que a densidade de partículas é constante, mostre que se poderia pensar que o tapete seria capaz de levitar e carregar uma carga útil de massa m. Calcule o valor de m.

(c) Isso é realmente possível? Discuta o resultado.

2.30 Gás ideal 1D***

Uma massa M se aproxima de uma parede com velocidade V, a uma distância x_0 da parede está uma pequena massa m, tal que $m << M$. As massas colidem e m inicia um movimento de sucessivas colisões com a massa M e a parede, sendo todas perfeitamente elásticas.

Utilizando um modelo de teoria cinética dos gases e adotando um caso particular de um gás com apenas um grau de liberdade, estime qual a menor distância que a massa M consegue chegar da parede.

2.31 Osciladores harmônicos quânticos ***

Considere um oscilador harmônico de frequência angular ω em uma dimensão. Esse sistema é caracterizado por movimentos oscilatórios de uma determinada frequência ω, porém com energias quantizadas dadas pela expressão $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, onde n é um número inteiro não-negativo. Se a temperatura é tal que $kT >> \hbar\omega$, as somas sobre o número quântico do oscilador podem ser aproximadas por uma integral na energia segundo a transformação

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rightarrow \int_0^{\infty} G(\epsilon)d\epsilon \qquad (2.12)$$

onde $G(\epsilon)d\epsilon$ é o número de estados do oscilador no intervalo de energia $[\epsilon, \epsilon + \Delta\epsilon]$.

(a) Encontre a expressão para a densidade de estados $G(\epsilon)$ de um oscilador quântico na condição de temperaturas elevadas.

(b) Utilizando a estatística de Boltzmann, calcule a energia média $u(T)$ do oscilador nesta aproximação.

(c) Generalize os resultados obtidos nos itens anteriores para o caso do oscilador harmônico tridimensional. Para isso, considere que ele pode ser decomposto como três osciladores harmônicos unidimensionais independentes de energias E_x, E_y e E_z, com a energia total E sendo dada por $E = E_x + E_y + E_z$.

Dado:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax} = \frac{2}{a^3}.$$

2.32 Orientando de dipolos elétricos **

Considere moléculas de água como pequenos dipolos elétricos, cujo momento de dipolo elétrico vale $p = 0.4$ eÅ, que se alinham quando um campo elétrico externo $\vec{E}$ é aplicado. Sabendo que a energia potencial de um dipolo elétrico, cujo momento de dipolo é dado por $\vec{p}$, localizado dentro de um campo elétrico externo uniforme $\vec{E}$ é dado por $U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$, faça o que se pede.

(a) Calcule a distribuição de probabilidade de orientação dos dipolos elétricos das moléculas de água com respeito ao campo elétrico. Deixe sua resposta em termos do parâmetro adimensional $\lambda = pE/kT$ e ângulo θ formado pelos os vetores $\vec{p}$ e $\vec{E}$.

(b) Estime a fração das moléculas de água é alinhada com o campo elétrico, com uma tolerância de 1^o, a temperatura de $T = 300$ K dentro de um campo de $E = 1$ kV/m.

(c) Qual a condição que deve ser satisfeita pelo campo elétrico E para que a fração de dipolos alinhados seja superior a $r = 1\%$ a $T = 300$ K.

2.33 Efeito Schottky (Brasil) ***

Vamos considerar um modelo simplificado de um gás ideal constituído por N partículas que podem ser encontradas em dois estados, com energias 0 ou $\epsilon > 0$. Para especificar o estado microscópico desse sistema é necessário o conhecimento do número de partículas em cada um dos estados energéticos. Considere o caso em que N_1 partículas estão no estado de energia nula e N_2 partículas estão no estado de energia ϵ.

Parte I – Cálculo da entropia do sistema

(a) Considerando que todas as partículas são idênticas e que a única forma de diferenciar cada uma é através de sua energia, determine o número de maneiras W pelas quais é possível obter um estado como aquele descrito no texto, como função de N, N_1 e N_2.

(b) Exprima o resultado obtido no item anterior como função da energia total $E = \epsilon(N - N_1)$ do sistema, da energia ϵ e do número total de partículas N da amostra.

A entropia do sistema é dada pela fórmula de Boltzmann

$$S = k \ln W, \tag{2.13}$$

que está escrita na lápide do seu túmulo. A constante k é conhecida como constante de Boltzmann e ln representa logaritmo na base natural e.

(c) Utilizando a fórmula fornecida, escreva a entropia S do sistema constituído pelo gás de dois níveis.

Parte II - Trabalhando com grandes populações

Em geral, ao se tratar sistemas termodinâmicos, estamos interessados nas propriedades para grandes populações, isto é , quando N, N_1 e N_2 são números grandes, da ordem de 1 mol. Neste caso, podemos lançar mão de aproximações que possibilitam um tratamento analítico do problema sem perder as características básicas do mesmo. Estas aproximações são parte do que se costuma chamar de limite termodinâmico. Entre as principais aproximações utilizadas está a famosa expansão de Stirling, que é dada por

$$\ln x! = x \ln x - x + O(\ln x), \tag{2.14}$$

em que os termos da ordem logarítmica podem ser desprezados.

(d) Utilize a expansão de Stirling para escrever a densidade de entropia do sistema $s = S/N$, como função da constante de Boltzmann, da energia ϵ e da densidade de energia $u = E/N$ do sistema.

(e) Obtenha a temperatura T do sistema como função de k, u e ϵ.

(f) A partir dos resultados obtidos nos itens (d) e (e), faça um esboço do gráfico de s como função de u.

(g) O que se espera para a temperatura quando $u > u/2$. Discuta o resultado.

(h) Determine a densidade de energia u como função de ϵ e do fator de Boltzmann $\beta = 1/kT$.

(i) O mesmo resultado poderia ter sido obtido utilizando os fatores de Boltzmann $P(0)$ e $P(\epsilon)$, através de uma média ponderada, ou

seja, $u = 0\ P(0) + \epsilon\ P(\epsilon)$. Determine quais são os fatores de Boltzmann em questão.

(j) Faça um esboço do gráfico de u contra T.

(k) Determine o calor específico c do sistema como função de β, ϵ e k.

(l) Faça um gráfico do calor específico c contra a temperatura para esse tipo de sistema. Deixe claro no seu esboço os limites $\beta\epsilon \to 0$ e $\beta\epsilon \to \infty$. A assinatura desse tipo de sistema é o calor específico obtido anteriormente e é conhecido como efeito Schottky.

2.34 Condensação de Bose-Einstein (Brasil) ***

Um fato decorrente da mecânica quântica é que a matéria apresenta características ondulatórias, sob certas condições. Uma descrição correta da matéria está associada a uma função de onda que indica a densidade de probabilidade de uma partícula estar numa determinada região do espaço. O comprimento de onda desta função densidade de probabilidade está associado ao momento linear carregado pela partícula.

A baixíssimas temperaturas os átomos apresentam, de acordo com a teoria cinética dos gases ideais, baixas energias cinéticas e, portanto, baixos momentos lineares. Neste regime, as características ondulatórias da matéria se tornam mais pronunciadas e as partículas passam a formar o que é denominado de Condensado de Bose-Einstein.

O fenômeno da condensação de Bose-Einstein foi previsto em 1924 para um gás ideal de partículas obedecendo à estatística de Bose-Einstein, que é análoga à estatística de fótons só que para a matéria. O primeiro condensado de Bose-Einstein foi produzido setenta anos mais tarde, em 1995, por Eric Cornell e Carl Wieman, utilizando um gás de átomos de rubídio arrefecido a 170 nK.

O objetivo deste exercício é determinar a que temperatura um gás ideal de bósons passa ao regime de condensação descrito, onde um grande número de partículas do sistema passa a ocupar o estado fundamental de energia.

Parte A - Distribuição estatística dos fótons

É dado um sistema de fótons que podem ocupar estados de energia com valores ϵ_k. A probabilidade relativa de que um desses fótons esteja nesse estado de energia é dada pela distribuição de Boltzmann $p(\epsilon_k) = e^{-\epsilon_k/k_BT} = e^{-\beta\epsilon_k}$, com $\beta = 1/k_BT$, onde k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do sistema.

(a) Determine a probabilidade $p_{n_k}(\epsilon_k)$ de que n_k fótons estejam no estado de energia ϵ_k.

(b) O número médio de fótons num estado k é dado pela média ponderada

$$\overline{n_k} = \frac{\sum\limits_{n_i=0}^{\infty} n_i p_{n_i}(\epsilon_k)}{\sum\limits_{n_i=0}^{\infty} p_{n_i}(\epsilon_k)} \tag{2.15}$$

Determine o valor de $\overline{n_k}$.

Parte B - Densidade de estados em um gás de bósons

A estatística dos bósons é análoga a dos fótons, com a única diferença de que a energia ϵ_k dos estados é agora substituída por $\epsilon_k - \mu$, onde μ é o potencial químico do gás. Nosso problema agora consiste em contar o número de partículas do gás. Como o gás é formado por bósons (i.e. partículas que não estão sujeitas ao princípio da exclusão de Pauli), é possível que mais de uma partícula esteja na configuração referente

ao mesmo estado de energia ϵ_k. Além disso, há estados de energia degenerados, ou seja, diferentes configurações do sistema conduzem à mesma energia. Como o comportamento das partículas é ondulatório, cada uma pode ser descrita pelo seu vetor de onda k, assim, o número total de partículas está associado a

$$\sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) \to \int d^3k \; g(k) f(\vec{k}), \tag{2.16}$$

onde $g(k)$ é a densidade de estados com vetor de onda entre k e $k + dk$, ou, de maneira análoga, $g(k)dk$ é o número de partículas com vetor de onda cujo módulo está entre k e $k + dk$. Vamos agora determinar a expressão para $g(k)$.

(c) Considere um gás ideal em um cubo de lado L. Mostre que os possíveis vetores de onda, definidos por $k = 2\pi/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda, são dados por

$$\vec{k} = \frac{\pi}{L}\left(n_x \hat{x} + n_y \hat{y} + n_z \hat{z}\right), \tag{2.17}$$

onde n_x, n_y e n_z são números inteiros positivos.

(d) Com $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$, mostre que o número de estados com vetores de onda que satisfazem a condição $k \leq \frac{n\pi}{L} \leq k + dk$ é dado por

$$g(k)dk = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk, \tag{2.18}$$

onde V é o volume do sistema.

A partir de agora consideraremos $\hbar = k_B = 1$ para simplificação dos cálculos subsequentes.

(e) Mostre que para um gás de partículas não relativísticas (que é o caso em questão) de massa m, o número de estados com energia entre ϵ e $\epsilon + d\epsilon$ é dado por

$$g(\epsilon)d\epsilon = \frac{V}{\sqrt{2}\pi^2}\, m^{3/2}\, \epsilon^{1/2} d\epsilon. \tag{2.19}$$

Parte C - Determinação de temperatura crítica

A temperatura crítica para a condensação de Bose-Einstein é obtida exigindo-se que, para densidade fixa, o potencial químico se anule. Neste caso, a expressão para $\overline{n_k}$ é a mesma obtida no item (b) da parte A. O número total de partículas é dado por

$$N = \int_0^\infty d\epsilon\, \overline{n_k}\, g(\epsilon). \tag{2.20}$$

(f) Determine a temperatura crítica em termos de massa m, da densidade de partículas $\rho = N/V$ e da integral

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}dx}{e^x - 1} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2,612\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

onde $\zeta(x)$ é a função zeta de Riemann e $\Gamma(x)$ é a função gama.

3

Ondas e Óptica

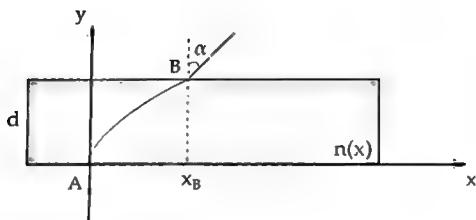
3.1 Vidro semi-opaco (IME) *

Um feixe de luz de intensidade I incide perpendicularmente em uma lâmina de vidro de espessura constante. A intensidade da onda transmitida do ar para o vidro, e vice-versa, é reduzida por um fator q $(0 < q < 1)$. Ao chegar a cada interface de separação entre o ar e o vidro, a onda se divide em refletida e transmitida. Calcule a intensidade total da luz que atravessa o vidro, após sucessivas reflexões internas nas superfícies do mesmo.

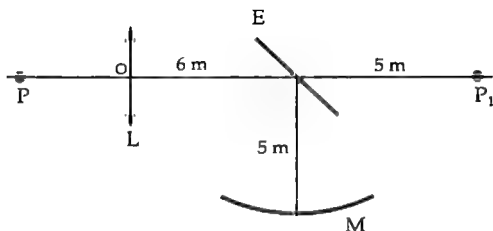
3.2 Luz em um meio não homogêneo (Brasil) ***

Considere um material com faces paralelas, transparentes e de espessura d, conforme mostra a figura abaixo. O índice de refração deste material varia como:

$$n(x) = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}} \tag{3.1}$$

Um feixe de luz proveniente do ar entra perpendicularmente numa

das faces do material no ponto A ($x_A = 0$) e emerge na outra face pelo ponto B com um ângulo α . Determine o índice de refração n_B no ponto B e o valor de x_B.

3.3 Medindo a velocidade da luz (Brasil) **

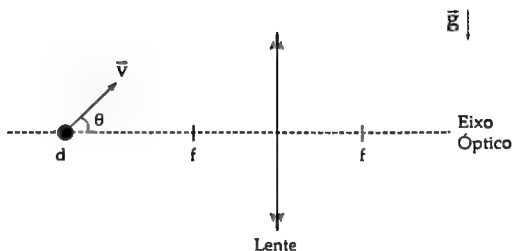
No esquema representado na figura abaixo, um ponto luminoso P é colocado diante de uma lente delgada e convergente L, de distância focal $f = 1$ m. Os raios de luz que emergem da lente convergem para um ponto P_1, porém são refletidos por um espelho plano **E** (posicionado a 45^o), que os reflete na direção de um espelho côncavo M, de raio $R = 5$ m. O centro C do espelho plano E coincide com o centro de curvatura do espelho esférico. Nesta configuração, os raios provenientes do ponto P serão refletidos e focalizados novamente sobre o mesmo ponto P. O espelho E é colocado a girar em torno de um eixo normal ao plano da figura e centrado em C, com uma frequência de $f = 500$ Hz. Nesta situação, a imagem P' do ponto P sofrerá um deslocamento transversal de $y = 0,11$ mm em relação ao eixo PP_1, devido à velocidade finita da luz. De posse destes dados e dos fornecidos no esquema, monte um modelo e determine a velocidade da luz.

3.4 Imagem de tamanho fixo**

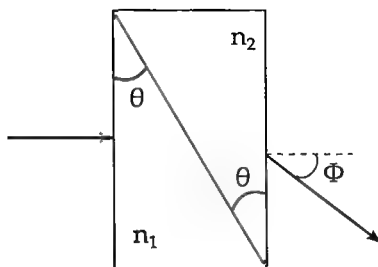
Considere duas lentes convergentes, a primeira de distância f_1 e a segunda de distância f_2. Elas são posicionadas de tal forma que seus eixos ópticos sejam coincidentes. Esse sistema é utilizado para formar uma imagem de um determinado objeto. Sabendo que o tamanho da imagem do objeto independe da posição do mesmo, calcule a distância x entre as duas lentes e o aumento linear M do sistema óptico.

3.5 Imagem de um projétil**

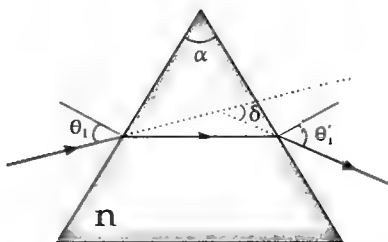
Um corpo luminoso encontra-se posicionado sobre o eixo óptico de uma lente esférica convergente de distância focal f, distando d do vértice da lente. Esse corpo se encontra sob a ação do campo gravitacional local $\vec{g}$ e é lançado com velocidade $\vec{v}$, que forma um ângulo θ com a direção horizontal.

Determine o ângulo de lançamento θ necessário para que a distância entre esse eixo e a imagem do corpo luminoso, produzida pela lente, varie linearmente com o tempo até o instante anterior ao de seu retorno ao eixo óptico.

Dados: $g = 10\text{m/s}^2$, $v = 4\text{m/s}$, $f = 1,2$ m e $d = 2$ m.

3.6 Desvio angular de um par de prismas *

Dois prismas idênticos, a não ser por valores de índice de refração ligeiramente diferentes n_1 e n_2, com $\Delta n << \min\{n_1, n_2\}$, são dispostos conforme ilustra a figura a seguir.

O ângulo θ de abertura dos primas pode ser considerado pequeno. Quando um raio de luz incide de maneira normal a uma das superfícies, o raio refratado é desviado de um pequeno ângulo Φ. Calcule a diferença Δn de índices de refração dos dois prismas em termos de θ e Φ.

3.7 Prisma ótico*

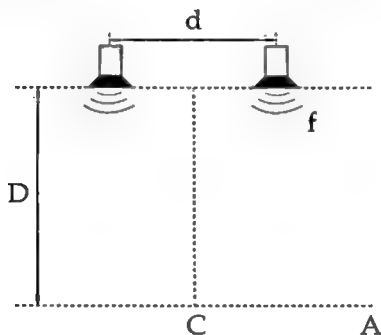
Considere um prisma ótico de ângulo, de abertura α, feito de um material transparente de índice de refração n. O prisma é atravessado por um raio de luz que incide em uma das faces planas, fazendo um ângulo de incidência θ_1 com respeito a normal, e sai do prisma fazendo um ângulo θ_1', como mostra a figura a seguir. O ângulo δ é chamado de desvio angular do raio de luz.

(a) Argumente porque o ângulo de desvio é mínimo quando $\theta_1 = \theta_1'$.

(b) Demonstre que o índice de refração do prisma pode ser determinado pelos ângulo de abertura α e o desvio angular mínimo δ, segundo a expressão

$$n = \frac{sen\left[\frac{1}{2}(\delta + \alpha)\right]}{sen(\alpha/2)}. \tag{3.2}$$

(c) Demonstre que, para pequenos ângulos de abertura do prisma ($\alpha << 1$) e incidência quase normal do raio de luz ($\theta_1 << 1$), o ângulo de desvio é dado por $\delta = (n-1)\alpha$.

3.8 Interferência entre alto-falantes (OIbF) *

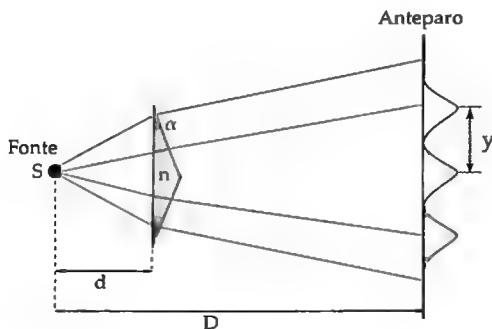
Considere dois pequenos alto-falantes, dispostos como mostrado na figura, que emitem sons de frequência f de mesma intensidade e diferença de fase constante. Um observador desloca-se sobre a reta A, situada a uma distância D do sistema de alto-falantes.

(a) Sabendo que, se o observador encontra-se no ponto C (equidistante das fontes) não percebe nenhum som, determine a diferença de fase entre os sons emitidos pelos alto-falantes.

(b) Calcule a distância L que o observador deve se deslocar sobre a reta A, a partir do ponto C, para encontrar o primeiro máximo de intensidade sonora.

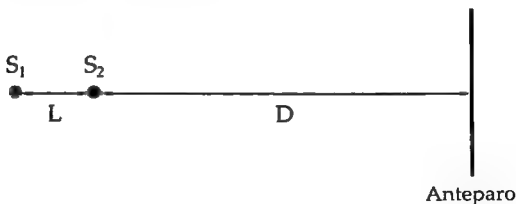
(c) Se a intensidade do som percebida pelo observador quando apenas um alto-falante emite é I_0, qual é a intensidade medida pelo observador no primeiro máximo, quando os dois alto-falantes emitem?

Dados: $c = 330$ m/s (velocidade do som), $f = 3400$ Hz, $D = 10$ m e $d = 0,5$ m.

3.9 Experimento de Young com prismas (Canadá) **

O problema a seguir trata de uma interessante variação da experiência de dupla fenda de Young concebida por Fresnel. Nessa experiência dispomos de apenas uma fonte óptica e utilizamos um par de prismas ópticos delgados idênticos, feitos de um material de índice de refração n e unidos ao longo do seu menor lado, conforme a figura a seguir. O ângulo de abertura α dos primas ópticos pode ser considerado pequeno e pode-se considerar que o ângulo de incidência dos raios de luz nos prismas estão próximos do eixo de simetria da figura.

Uma fonte de luz S, de comprimento de onda λ, é localizada a uma distância d das faces dos prismas, conforme mostra a figura. Os raios de luz da fonte S são desviados pelos prismas e criam um padrão de interferência em um anteparo distante de D da fonte luminosa, apresentando franjas claras e escuras. Calcule a distância y entre duas franjas de interferência claras em função dos parâmetros fornecidos.

3.10 Interferência em anteparo (OIbF) *

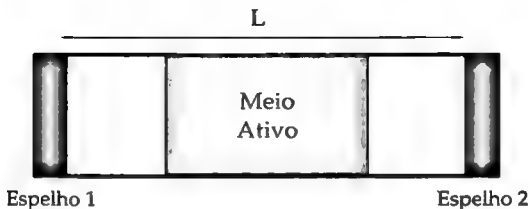
Duas fontes luminosas pontuais e coerentes, S_1 e S_2, estão sobre uma reta perpendicular a um anteparo. A distância entre as duas fontes é $L = 2\lambda$, onde λ é o comprimento de onda da luz, e a distância entre a fonte S_2 e o anteparo é dada por $D >> \lambda$.

(a) No ponto O do anteparo, que está alinhado com as fontes, observa-se um máximo de interferência rodeado de um anel brilhante. Explique o porquê.

(b) Determine o raio do anel.

3.11 Interferência em um lago *

Uma torre receptora de ondas de rádio é montada no meio de um grande lago de águas calmas e recebe sinal de um satélite que orbita ao redor da Terra. A medida que o sinal do satélite surge no céu, a intensidade do sinal recebido pela torre varia devido aos efeitos de interferência. Quando o satélite encontra-se $\theta_1 = 3^o$ acima do horizonte, a intensidade do sinal recebido é máxima. Esse efeito se repete quando o satélite atinge a posição $\theta_2 = 6^o$ acima do horizonte. Sabendo que a torre receptora tem $H = 4,0$ m de altura a partir da superfície do lago, calcule o comprimento de onda emitido pelo satélite.

3.12 Cavidade ressonante de um LASER (Brasil) **

Um Laser pode ser construído com dois componentes básicos: uma cavidade ressonante de comprimento L e dois espelhos colocados nas extremidades de um meio (chamado de meio ativo) que produz luz a partir da algum tipo de energia externa fornecida (descarga elétrica, corrente elétrica entre outras). A luz que é emitida pelo meio ativo reflete nos espelhos voltando a passar várias vezes através deste, o que faz com esta seja amplificada - princípio básico de funcionamento de um sistema Laser. A cavidade faz com que sejam criadas ondas estacionárias em seu interior. Um dos espelhos não é totalmente refletor, o que faz com que uma pequena fração da luz no interior da cavidade "saia" para o exterior e possa ser utilizada em alguma aplicação específica. Um modelo esquemático da cavidade de um sistema Laser está representado na figura abaixo. Use, se necessário, $c = 3.10^8$ m/s para o valor da velocidade da luz no vácuo.

(a) Quais são as frequências possíveis das ondas estacionárias no interior desta cavidade? Expresse sua resposta em termos do comprimento da cavidade L e da velocidade da luz no vácuo c.

(b) Suponha que o meio ativo emite uma frequência pura igual a $\nu = 5.10^{14}$ Hz. Qual o modo normal que é excitado na condição em que $L = 1,5$ m?

(c) Suponha agora que o meio ativo emita frequências no intervalo $\nu \pm \Delta\nu$, onde $\nu = 5.10^{14}$ Hz e $\Delta\nu = 1.10^{9}$ Hz. Nesta condição, quantos modos normais são excitados em uma cavidade de comprimento $L = 1,5$ m?

(d) Usando os valores de ν e $\Delta\nu$ do item (c), determine qual o valor máximo de L para que apenas um modo normal seja excitado na cavidade.

3.13 Sonar do morcego *

Animais como os morcegos se orientam no escuro utilizando um sistema parecido com um sonar, também chamado de ecolocalização. Esse animal emite ondas sonoras de alta frequência que, ao atingirem um objeto, são refletidos e posteriormente captados pelos ouvidos do morcego. Dessa maneira, os morcegos conseguem identificar, através do eco do som emitido os objetos em volta deles, bem como diferentes formas, tamanhos e seus movimentos.

Considere que um morcego está voando a uma velocidade de $v_m = 5,00$ m/s em direção a uma presa. O morcego emite uma onda de ultrassom de frequência natural $f_0 = 40,0$ kHz e escuta um eco de frequência $f_{eco} = 40,4$ kHz. Sabendo que a velocidade do som é dada por $c = 340$ m/s, calcule a velocidade v_p com que a presa está se aproximando ou a se fastando do morcego.

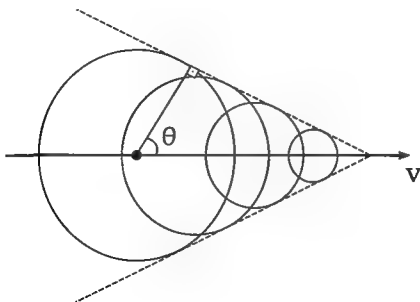
3.14 Radiação Cerenkov (IPhO) ***

A luz propaga-se no vácuo com velocidade c. Não existe nenhuma partícula que se possa propagar com velocidade superior a esse valor, porém é possível uma partícula se mova com velocidade v superior à velocidade da luz no meio material em que o movimento acontece. A velocidade da luz no meio material é dada por c/n, onde n é o índice

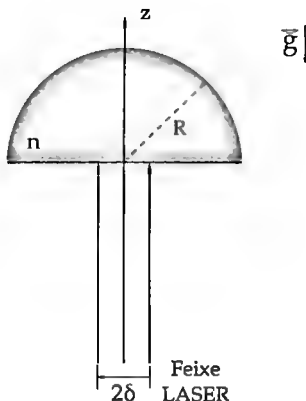
de refração do meio. Experiência (Cherenkov, 1934) e teoria (Tamm e Frank , 1937), mostraram que uma partícula carregada, que se mova com velocidade v num meio transparente de índice de refração n tal que $v > c/n$, emite radiação, denominada Radiação de Cherenkov.

(a) Mostre que a onda de choque da radiação emitida pela partícula se propaga fazendo um ângulo θ_c com a trajetória da partícula dado pela expressão

$$\cos\theta_c = \frac{1}{n\beta}, \tag{3.3}$$

onde $\beta = v/c$.

(b) Mostre que um espelho esférico de raio R focalizará a onda de choque em um anel contido no plano focal do espelho. Encontre o raio do anel formado pela radiação da partícula.

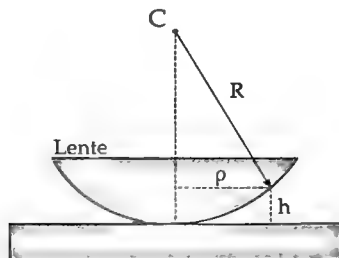
3.15 Levitação óptica (IPhO) ***

Um hemisfério de vidro de massa m e raio R tem um índice de refração dado por n. Considera-se que o índice de refração do meio que cerca o hemisfério é dado pela unidade. Um feixe de luz paralelo e monocromático incide uniformemente de forma perpendicular à face plana do hemisfério, como mostra a figura a seguir.

A aceleração local da gravidade é g, sendo vertical e dirigida para baixo. O feixe tem uma secção transversal circular de raio $\delta << R$ e incide exatamente no centro do hemisfério, tendo simetria axial com respeito ao eixo z. O vidro não absorve luz e suas superfícies são tratadas de tal forma que as reflexões nas interfaces são desprezíveis. Toda a luz que entra no vidro é, portanto, refratada de volta para o ar. O caminho transversal percorrido pelo raio de luz é desprezível. Ignorando os termos a partir da ordem $O(\delta^3)$, encontre a potência mínima necessária para fazer o hemisfério de vidro levitar.

3.16 Anéis de Newton *

Isaac Newton, além das suas valiosas leis da Mecânica também contribuiu com outras áreas da Física, como a Óptica. Dentre algumas de suas contribuições na área, podemos citar o estudo de padrões de interferência que são conhecidos atualmente como 'anéis de Newton'. Nesse padrão são observadas franjas concêntricas circulares claras e escuras, ou franjas concêntricas circulares nas cores do arco-íris, pro-

duzidas por interferência na camada fina de ar entre duas superfícies reflexivas adjacentes.

O arranjo da conhecida experiência dos anéis de Newton é ilustrado na figura a seguir. Uma lente plano-convexa de raio R é posta sobre uma placa espessa de vidro. Ilumina-se esse sistema de cima para baixo, perpendicularmente à face plana da lente, com luz monocromática de comprimento de onda λ e observa-se então a formação dos anéis. Considere a lente delgada, isto é, $h << R$.

(a) Calcule a relação geométrica entre as distâncias ρ e h na vizinhança do ponto O, indicado na figura.

(b) Calcule o raio ρ_n do n-ésimo anel claro.

3.17 Ionosfera em movimento (Brasil) **

Um receptor de rádio de ondas curtas recebe simultaneamente dois sinais de um transmissor que está situado a 500 km de distância, sendo um deles proveniente da onda que caminha ao longo da superfície e o outro vindo da reflexão na ionosfera, que atua como um espelho para este tipo de onda. Considere que a ionosfera esteja situada a 200 km da superfície terrestre. Verifica-se que quando a frequência transmitida pela onda é de 10 MHz, o sinal combinado, devido aos dois sinais

recebidos, varia entre dois máximos consecutivos, 8 vezes por minuto. Este fenômeno é devido ao deslocamento da ionosfera. Determine qual é a velocidade de deslocamento da ionosfera. Assuma que a superfície da terra é praticamente plana e que não haja nenhuma turbulência na atmosfera.

3.18 Diâmetro de uma objetiva (Brasil) *

Um telescópio será utilizado para observar, a 10 km de distância, dois objetos separados por 0,12 m. Faça uma estimativa do diâmetro da lente objetiva do telescópio para que seja possível fazer uma distinção entre estes dois objetos, considerando que ambos são iluminados por uma luz monocromática de comprimento de onda 600 nm.

3.19 Física de uma câmera digital (IPhO) **

Considerar uma câmara fotográfica digital com um sensor CCD quadrado de dimensão linear $L = 35$ mm e $N_p = 5$ Mpix (1 Mpix = 10^6 pixels). A distância focal da lente desta câmera é $f = 38$ mm. A bem conhecida sequência de números que aparece na lente (2 / 2,8 / 4 / 5,6 / 8 / 11 / 16 / 22) indica o chamado número-F, designado por F#. Este número é o quociente entre a distância focal f e o diâmetro D da abertura da lente

$$F\# = \frac{f}{D}. \tag{3.4}$$

(a) Determinar a melhor resolução espacial Δx_{min}, no CCD, da câmara, supondo que a única limitação é a lente. Escrever o resultado em função do comprimento de onda λ e do número-F, F#, e obter o valor numérico para $\lambda = 500$ nm.

(b) Qual é o número N de Mpix necessários para que o sensor CCD chegue a esta resolução ótima?

(c) Por vezes os fotógrafos tentam usar a menor abertura da lente possível. Supondo que a câmara fotográfica tem agora $N_0 = 16$ Mpix, sendo o tamanho do CCD e a distância focal os referidos acima, qual é o valor de F# para o qual a qualidade da imagem não está limitada pela óptica?

(d) Sabendo que o olho humano tem uma resolução angular de, aproximadamente, $\varphi = 2$ arcsec, e que uma impressora fotográfica típica imprime um mínimo de 300 dpi (pontos por polegada - dots per inch), a que distância mínima z dos olhos se deve segurar uma página impressa de modo a não se distinguirem os pontos?

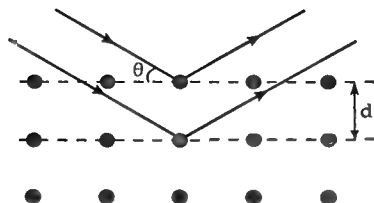
Dados: 1 polegada= 25,4 nm; 1 arcsec $= 2,91.10^{-4}$ rad.

3.20 Lei de Bragg e difração de raios-X (Canadá)*

Para se estudar fenômenos de difração no intervalo de frequências do espectro luminoso, constumam-se ser utilizadas redes de difração artificiais, compostas por fendas micrométricas. Para se estudar esse tipo de fenômenos com ondas eletromagnéticas de menor comprimento de onda, como o raio-X, costumam-se utilizar redes de difração naturais disponíveis em materiais sólidos de estrutura cristalina.

A figura a seguir mostra como a interação da luz com dois planos cristalinos, separados de uma distância d, pode gerar padrões de interferência. Esse fenômeno decorre da diferença de caminho entre o raio de luz que interage com átomos do primeiro e do segundo plano atômico.

(a) Demonstre que a condição de interferência construtiva dos raios de luz é dada pela lei de Bragg:

$$2d\text{sen}\theta = m\lambda, \quad m = 1,\ 2,\ 3, \ldots \tag{3.5}$$

Se o comprimento de onda da onda eletromagnética e o ângulo de difração forem conhecidos, a equação de Bragg pode ser usada para calcular o espaçamento entre planos atômicos da estrutura cristalina do material. Nesse problema, o cristalino de cloreto de sódio (NaCl) com densidade $\rho = 2.16\text{g/cm}^3$ é exposto a raios-x com o ângulo de incidência $\theta = 60.0°$, sendo observada uma condição de interferência construtiva de ordem $m = 2$.

(b) Sabendo que os átomos do sódio e cloro organizam-se em uma estrutura cúbica, encontre o comprimento de onda dos raios-X usados no experimento.

(c) Explique por que a luz visível não pode ser usada para obter o padrão de difração em retículos cristalinos.

Dados:

Massa de um átomo de sódio m_{Na} = 23,0 uma.
Massa de um átomo de cloro m_{Cl} =35,5 uma.

Parte II

Dicas de resolução

1

Mecânica da Partícula

1.1 Barcos em formação triangular

(a) Utilize coordenadas polares com centro no baricentro do triângulo formado pelas embarcações. Observe a coordenada radial.

(b) Relacione o movimento realizado na coordenada polar com o movimento realizado na coordenada radial e busque eliminar o tempo da sua equação.

1.2 Desvio de um asteroide

Explore argumentos cinemáticos e geométricos para resolver o problema.

1.3 Alcance do Chafariz

(a) Considere o jato de água orientado na vertical.

(b) Considere o jato de água orientado com inclinação de 45^o com a horizontal.

(c) Verifique qual a condição para que um ponto possa ou não ser atingido por um jato de água.

1.4 Carro no atoleiro

Estude o movimento do lançamento oblíquo de um corpo que se descola da periferia do pneu e busque maximizar a altura atingida variando o ponto de descolamento.

1.5 Deslizamento bidimensional no plano inclinado

Calcule o coeficiente de atrito entre o bloco e busque encontrar uma grandeza que se conserva no movimento para facilitar a resolução do problema.

1.6 A corrente e a balança (OIbF)

(a) Aplique a condição de equilíbrio de forças para uma porção de comprimento z da corda.

(b) Observe que ao soltar a extremidade da corda, todos os seus pontos iniciam um movimento de queda livre.

(c) Utilize a definição de força como taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear $F = \frac{dP}{dt}$.

1.7 Máquina de Atwood com infinitas massas

Utilize o conceito de massa efetiva de uma máquina de Atwood com duas massas e use argumentos associados ao fato de haver infinitas massas no sistema.

1.8 Anel de polias

Escreva as equações de movimento para cada uma das massas, utilizando também os vínculos geométricos do sistema.

1.9 Corda suspensa no plano inclinado (EUA)

Divida a corda em três partes: a parte suspensa, a apoiada no plano inclinado da esquerda e a apoiada no plano inclinado da direita.

1.10 Cavidade em um planeta

(a) Faça uso do princípio da superposição.

(b) Utilize notações vetoriais adequadas.

1.11 Queda Livre Espacial

(a) Busque aplicar leis de Kepler para o movimento do corpo de massa m. Lembre-se também uma reta é um caso degenerado de uma elipse.

(b) Utilize o conceito de massa efetiva e utilize o resultado do item anterior.

1.12 Triângulo planetário (IPhO)

Aplique conceitos de centro de massa e de força resultante centrípeta. Escrever o problema utilizando vetores pode ser uma boa ideia.

1.13 Iglu

(a) Analise o movimento da partícula de massa m sobre o iglu e determine o ângulo θ tal que a força de contato entre ela e o iglu seja nula.

(b) Utilize o referencial não inercial do iglu adapte as ideias utilizadas no item anterior nessa nova situação.

1.14 Movimento de um foguete

(a) Conserve o momento do sistema (foguete+gases expelidos).

(b) Utilize o resultado do item anterior e o fato da taxa de queima de combustível ser constante.

1.15 Dinâmica de uma gota de chuva

(a) Utilize a definição de $\lambda = \frac{dm}{Sdt}$

(b) Utilize a segunda lei de Newton para sistemas com massa variável.

(c) Integre o resultado do item anterior no tempo.

1.16 Deslizamento de Cilindros

Tente calcular até que instante os cilindros permanecem em contato um com o outro.

1.17 Viagem por dentro da Terra

Mostre que o movimento realizado pelo ônibus é um movimento harmônico simples (MHS).

1.18 Desvio da vertical do pêndulo (Brasil)

A força inercial responsável pelo desvio do pêndulo é a força centrífuga.

1.19 Barco de guerra

(a) Conserve a quantidade de movimento do sistema.

(b) Utilize o resultado do item anterior para obter uma estimativa inicial da distância percorrida. Esse resultado pode ser refinado comparando a curva aproximada com a curva real.

1.20 Cilindros Rolantes

Para ambos os itens, calcule as forças de atrito com cada um dos cilindros para calcular a equação que descreve a dinâmica da haste.

1.21 Corrente na polia

(a) Tome uma pequena porção da corda que descreve uma trajetória circular em contato com a polia.

(b) Utilize conservação de energia e calcule o instante em que a corda perde o contato com a polia. Suponha que o raio da polia é muito menor que L.

1.22 Colisões bidimensionais

Os três itens decorrem diretamente da conservação da quantidade de movimento e da energia mecânica do sistema.

1.23 Satélite em formato de haltere

(a) Considere nesse momento que toda a massa do satélite pode ser concentrada no seu centro de massa.

(b) Considere pequenas variações do campo gravitacional em torno de r_0.

(c) A força fictícia que surge é a centrífuga e por isso aponta no sentido oposto ao da gravidade.

(d) Basta contabilizar a soma da força centrífuga e gravitacional atuantes no corpo e verificar o resultado pedido.

(e) Verifique os pontos de equilíbrio do sistema e verifique se existe torque restaurador para pequenos deslocamentos angulares.

(f) Esse item pode ser obtido reutilizando resultados passados e fazendo uma analogia com um pêndulo simples.

1.24 Potencial Efetivo

(a) Mostre que o plano que contém o movimento em um intervalo de tempo $[t, t + dt]$ é sempre perpendicular ao vetor $\vec{L}$.

(b) Utilize as coordenadas polares.

(c) Utilize a conservação do momento angular para incorporar a energia cinética rotacional no potencial efetivo do movimento radial.

1.25 Perturbação de órbita

(a) Use equações básicas da dinâmica do movimento circular.

(b) Use potencial efetivo e estude o potencial encontrado nas vizinhanças do ponto $r = R$.

(c) Análogo ao item a), basta considerar a massa da nuvem de poeira.

(d) Análogo ao item b), basta introduzir um termo no potencial que gere a força gerada pela nuvem de poeira.

(e) Calcule qual o ângulo descrito pelo vetor posição do planeta durante um período da sua oscilação radial. A diferença entre 2π e esse resultado está diretamente relacionado com Ω.

1.26 Pilha de tijolos

Tente estudar essa situação de equilíbrio estático considerando inicialmente os casos iniciais e tente generalizar a ideia para uma pilha de N tijolos. Usar argumentos baseados no princípio de indução finita pode ser útil.

1.27 Cordão elástico

(a) O ponto de equilíbrio corresponde a um mínimo da energia potencial do sistema.

(b) O período da oscilação pode ser obtido através de uma aproximação parabólica da energia potencial do sistema.

1.28 Conta no aro girante

(a) É interessante adotar o referencial girante solidário ao anel.

(b) A frequência de oscilação pode ser obtida através de uma aproximação parabólica da energia potencial do sistema.

1.29 Pêndulo no carrinho

(a) Quantidade de movimento e energia mecânica são grandezas conservadas no movimento. Observar o que acontece no referencial não inercial do bloco de massa M pode ser útil.

(b) Utilize o método da energia total para resolver esse problema.

1.30 Oscilações Acopladas I

Escreva a equação de movimento dos três corpos e busque soluções oscilatórias de frequência angular ω para o sistema.

1.31 Oscilações acopladas II

(a) O número de graus de liberdade é função no número de partículas e do número de restrições de contorno.

(b) Encontre o novo número de graus de liberdade. Escreva as equações de movimento do sistema e busque soluções oscilatórias.

(c) Análogo ao item anterior.

2

Termodinâmica

2.1 Aquecimento de duas esferas

Analise como o trabalho da força peso pode fornecer ou retirar energia do sistema.

2.2 Tira bimetálica

Pense na tira bimetálica descrevendo um arco de circunferência θ, em radianos. Tome sempre os comprimentos das tiras nos seus respectivos centros.

2.3 Termômetro de mercúrio

Note que, além do mercúrio, as paredes de vidro do termômetro também dilatam.

2.4 Esfera na água aquecida

Descubra qual a relação entre as capacidades térmicas dos dois recipientes.

2.5 Condutividade térmica de barras

Para facilitar a resolução é interessante usar o conceito de resistência térmica de cada uma das barras.

2.6 Chapas de aço no Sol

Modele as seguintes trocas de calor: calor absorvido da irradiação solar, calor trocado entre a superfície superior com o ambiente, calor trocado entre as duas superfícies via transferência de calor por condução e, por último, calor trocado entre a superfície inferior com o ambiente.

2.7 Congelamento de um lago

Use a lei de Fourier e relacione o calor retirado do lago com a variação da espessura da parede de gelo.

2.8 Sistema com pistão ligado a uma mola

(a) Utilize a primeira lei da termodinâmica e tente relacionar a deformação da mola com as variáveis de estado do gás.

(b) Considere pequenas perturbações em torno da posição de equilíbrio.

(c) Análogo ao item (b).

2.9 Estrangulamento de tubo

(a) Escreva a equação de equilíbrio de forças do sistema composto pelo par de êmbolos.

(b) Note que a pressão calcula no item anterior não depende da temperatura ou do volume e considere a transformação desse item como isobárica.

2.10 Transformação gasosa irreversível

Divida o problema em duas partes: uma expansão isotérmica e uma compressão adiabática.

2.11 Bomba de de gás

(a) Você pode deduzir uma relação de recorrência entre as pressões P_i, definida como a pressão do gás após um número inteiro i de compressões, e a pressão P_{i-1}. A partir da equação de recorrência é possível determinar P_N.

(b) A solução desse item tem o seu raciocínio análogo ao anterior, sendo necessárias pequenas correções pelo fato de as transformações gasosas passarem a ser adiabáticas.

2.12 Volante oco com gases

(a) A resposta é direta e dispensa muitos cálculos.

(b) Relacione as situações iniciais e finais de cada gás dos gases e mostre que a razão dos volumes mantém-se inalterada.

(c) Realize o equilíbrio de forças nas massas. Considerar os três gases como um único sistema gasoso pode ser interessante.

(d) Calcule a variação total de cada gás e decomponha-a em duas componentes, uma associada a penetração do pistão e outra relacionada aos deslocamentos angulares.

2.13 Gases Ideais

Considere o conjunto dos dois cilindros como um único sistema físico sem troca de calor e massa com a vizinhança.

2.14 Relação de Mayer e aquecimento de gás

(a) Escreva a primeira lei da termodinâmica e a equação de Clapeyron nas suas formas diferenciais para uma transformação isobárica.

(b) Considere a transformação a volume constante e escreva em função de R e γ.

2.15 Ciclo Térmico

Refaça o diagrama que descreve as transformações gasosas utilizando coordenadas P e V.

2.16 Rendimento do ciclo Diesel

Determine os estados A, B, C e D. Em seguida, calcule o trabalho líquido e trocas de calor envolvidas no ciclo.

2.17 Rendimento do ciclo Joule

Determine os estados A, B, C e D. Em seguida, calcule o trabalho líquido e trocas de calor envolvidas no ciclo.

2.18 Rendimento do motor a gasolina

Determine os estados A, B, C e D. Em seguida, calcule o trabalho líquido e trocas de calor envolvidas no ciclo. Desenhar um diagrama das transformações do gás usando as coordenadas de pressão e volume pode ser útil.

2.19 Ciclo térmico de 3 estados

(a) Note que a transição gasosa em que P e V variam simultaneamente pode ser dividida em duas fases, uma em que há entrada de calor e outra que há liberação de calor.

(b) Identifique quais são os pontos do ciclo em que a temperatura é máxima e mínima. Em seguida calcula o rendimento de uma máquina de Carnot operando entre essas temperaturas.

2.20 Variação de entropia de um gás

(a) Utilizar a conservação da energia interna total do sistema pode ser útil.

(b) Escreva como a entropia do gás depende de outras variáveis de estado e calcule a variação de entropia no processo.

2.21 Pressão de uma atmosfera isotérmica

(a) Tome um cilindro de ar e calcule o aumento de pressão com a altitude decorrente do peso do ar contido no cilindro.

(b) Utilize o resultado do item a) associado a equação de Clapeyron.

2.22 Pressão atmosférica em uma nave espacial

Utilize o resultado $dp/dz = -\rho g$ e defina uma aceleração local efetiva, que surge a partir da força centrífuga vista pelo referencial girante da nave.

2.23 Nuvem de gás quente

Estude como a pressão deve variar com a distância do ponto até o centro da nuvem e, depois, utilize a equação dos gases para demonstrar que a temperatura da nuvem é constante.

2.24 Uma troca de Calor Diferente

(a) Use a primeira lei da termodinâmica e a definição de entropia.

(b) Imagine uma máquina de Carnot retirando trabalho desse sistema e discuta os efeitos disso sobre a entropia e a energia interna do sistema.

(c) Análogo ao item (a).

(d) Análogo ao item (b).

2.25 Gás não-ideal

(a) Utilize a relação fornecida e a primeira lei da termodinâmica na sua forma diferencial.

(b) As transformações isotérmica e a isobárica se confundem para esse gás.

(c) Análogo ao item anterior.

(d) Utilize a sugestão do problema e ajuste $T = 1$ quando $P = 1$.

(e) Utilize da definição de capacidade calorífica a volume constante do gás como a taxa entre calor fornecido e variação de temperatura.

(f) Utilize a primeira lei da termodinâmica na sua forma diferencial e utilize a definição de entropia $dS = dQ/T$.

2.26 Distribuição de probabilidade de velocidades de Maxwell

(a) A condição de normalização da probabilidade total pode ser expressa pela equação

$$\int_0^{\infty} F(v)dv = 1.$$

(b) Encontre o máximo de $F(v)$.

(c) O valor médio $\overline{p}$ de uma variável p com distribuição de probabilidade $f(p)$ é

$$\overline{p} = \int_{\infty}^{\infty} pf(p)dp.$$

(d) Análogo ao item anterior.

2.27 Vazamento de gás

(a) Use teoria cinética dos gases para avaliar o número de partículas que atravessam a área do furo por unidade de tempo.

(b) Relacione T à velocidade média das partículas e tente escrever uma equação que descreva o comportamento de $N(t)$.

2.28 Caixa de fótons (Canadá)

Utilize a teoria cinética de forma análoga ao que é feito com o gás ideal.

2.29 Tapete mágico

(a) Considere que ao colidir com o tapete as partículas entram em contato térmico com a parede, alterando a sua distribuição de velocidade.

(b) Aplique o resultado do item (a) para as duas superfícies do tapete.

(c) Se as conclusões de algum cálculo físico são falsas e não se observam experimentalmente, é necessário verificar quais premissas do modelo devem ser falsas.

2.30 Gás ideal 1D

Para fazer a analogia com a teoria dos gases é preciso definir grandezas análogas à pressão, temperatura e volume. O problema da aproximação da massa M pode ser visto como uma compressão adiabática. Outra solução possível considera as diferentes colisões elásticas e busca uma grandeza invariante entre as sucessivas colisões. Os resultados são

equivalentes, a não ser por um fator 2 decorrente das aproximações realizadas.

2.31 Osciladores harmônicos quânticos

(a) Identifique os possíveis valores de energia e defina uma densidade de estados por energia.

(b) Calcule a energia média de um oscilador como sendo uma média de todos os valores de energia possíveis ponderados pela probabilidade de cada estado estar ocupado.

(c) Calcule uma nova densidade de estados por energia para o oscilador tridimensional e verifique que alterações acontecem na expressão da energia média do oscilador.

2.32 Orientando de dipolos elétricos

(a) Considere que a função de distribuição de probabilidade da orientação do dipolo pode ser escrita como um fator de Boltzmann $e^{-E/kT}$ e de fatores geométricos.

(b) Utilize a interpretação da função de distribuição de probabilidade como uma 'densidade de probabilidade'.

(c) Encontre uma inequação que deve ser satisfeita por λ e em seguida traduza a condição encontrada para E.

2.33 Efeito Schottky

(a) Esse item se trata de uma aplicação direta do princípio da contagem.

(b) Note que $N_2 = E/\epsilon$.

(c) Aplicação direta da fórmula fornecida no enunciado.

(d) Utilize a aproximação de Stirling e utilize propriedades do logaritmo.

(e) A temperatura do sistema pode ser definida como $T = ds/du$.

(f) Observe os valores $\epsilon = 0, \epsilon/2$ e ϵ, assim como simetrias da função $s(u)$.

(g) A temperatura vai assumir valores bem atípicos nesse item.

(h) Reescreva o resultado do item (e) conforme pedido no enunciado.

(i) Compare o resultado encontrado no item anterior com a expressão fornecida.

(j) Utilize um gráfico u contra β como um intermediário para fazer o esboço.

(k) Utilize que $c = du/dT$.

(l) Utilize um gráfico u contra β como um intermediário para fazer o esboço.

2.34 Condensação de Bose-Einstein

(a) Utilize o fato da ocupação de cada fóton ser independente das dos demais.

(b) Se achar conveniente, utilize a identidade

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\left[\ln f(x)\right]$$

(c) Este problema é análogo ao sistema de uma corda com suas extremidades fixas, mas em três dimensões.

(d) Formalize esse problema adotando um sistema de eixos k_x, k_y e k_z.

(e) Esse item consiste basicamente de uma mudança de variável k para uma variável de energia ϵ.

(f) Desenvolva a equação fornecida utilizando os resultados obtidos nos itens anteriores.

3

Ondas e Óptica

3.1 Vidro semi-opaco

Contabilize na sua solução a fração da intensidade transmitida e refletida das múltiplas reflexões possíveis nas interfaces vidro/ar.

3.2 Luz em um meio não homogêneo

Considere diferentes 'fatias' do material com coeficientes de refração $n(x)$. Estude como a direção do raio de luz deve depender da coordenada x.

3.3 Medindo a velocidade da luz

Verifique como a rotação do espelho E associada com a velocidade finita da luz é capaz de gerar um deslocamento transversal da imagem.

3.4 Imagem de tamanho fixo

Considere que a imagem que a primeira lente cria serve de objeto para a segunda lente e, em seguida, utilize que o tamanho da imagem independe da posição do objeto.

3.5 Imagem de um projétil

Calcule a posição do objeto em função do tempo e, em seguida, calcule a posição da imagem.

3.6 Desvio angular de um par de prismas

Utilize a lei de Snell com a aproximação de pequenos ângulos para cada uma das interfaces.

3.7 Prisma ótico

(a) Utilize o fato de existir um único ângulo de desvio mínimo e o princípio da reversibilidade do raio de luz.

(b) Utilize a condição do item anterior, utilize a lei de Snell e explore a geometria do problema.

(c) Estude os efeitos de incidências quase normais aplicando o limite de pequenos ângulos e a lei de Snell.

3.8 Interferência entre alto-falantes

(a) Utilize a condição de interferência destrutiva entre ondas.

(b) Calcule qual a diferença de percurso causada pelo deslocamento de L mostrado na figura.

(c) Utilize qual a relação entre a intensidade de uma onda e sua amplitude.

3.9 Experimento de Young com prismas

Mostre que o efeito dos dois prismas é criar duas imagens virtuais responsáveis pelo padrão de interferência idêntico ao observado no experimento de Young. O resultado de desvio angular $\delta = (n-1)\alpha$ para prismas de ângulo de abertura pequenos e incidência quase normal pode ser útil.

3.10 Interferência em anteparo

(a) Verifique as condições necessárias para a ocorrência de interferências construtivas para o ponto desejado.

(b) Para calcular o raio do anel podem ser utilizados diferentes tipos de aproximações, uma vez que $D >> \lambda$.

3.11 Interferência em um lago

Considere que a variação da intensidade do sinal recebido pela torre decorre da interferência do sinal recebido diretamente pela torre e do sinal recebido que sofreu uma reflexão na superfície do lago.

3.12 Cavidade ressonante de um LASER

(a) Verifique que os comprimentos de onda λ das ondas estacionárias no interior da cavidade laser devem ser compatíveis com o seu comprimento. O cálculo realizado é análogo ao de uma corda de um violão.

(b) Aplicação direta da expressão deduzida no item anterior.

(c) Verifique quantos modos normais cabem no intervalo $\nu \pm \Delta\nu$.

(d) Determine o novo comprimento da cavidade ressonante para que exista apenas um modo normal entre as frequências $\nu \pm \Delta\nu$.

3.13 Sonar do morcego

Calcule a frequência da onda emitida por reflexão pela mosca e, em seguida, calcule qual a relação desse valor e o eco percebido pelo morcego.

3.14 Radiação Cerenkov

(a) A solução desse problema é análoga à dedução da expressão do cone de Mach. Relacione a distância percorrida pela onda e pela partícula durante um intervalo de tempo arbitrário.

(b) Utilize o resultado de que raios paralelos convergem para pontos do plano focal da lente e estude os raios notáveis.

3.15 Levitação óptica

A relação entre energia e momento carregado por um raio de luz é $E = pc$. Analise o efeito do desvio dos raios de luz sobre o momento transportado pela luz e o relacione com o peso do hemisfério.

3.16 Anéis de Newton

(a) Utilize geometria básica relacionando as grandezas envolvidas no problema.

(b) Combine o resultado do item anterior com a condição de interferência construtiva ou destrutiva.

3.17 Ionosfera em movimento

Suponha que a ionosfera pode ser considerada como um espelho que se movimenta com relação ao solo e aplique condições de interferência construtiva/destrutiva.

3.18 Diâmetro de uma objetiva

Utilize a expressão dada pela fórmula de Airy para o poder separador da lente.

3.19 Física de uma câmera digital

(a) A resolução angular máxima de uma abertura de diâmetro D, segundo o critério de Rayleigh, é dada por

$$\theta_R = 1,22\frac{\lambda}{D}. \tag{3.1}$$

(b) Para resolver esse problema, basta dividir o sensor quadrado de lado $L = 35$ mm em quadrado de lado Δx_{min} e verificar o número de quadrados (ou pixels) necessários.

(c) Combine os raciocínios dos itens anteriores para determinar o valor máximo possível de $F\#$. Em seguida, verifique qual o valor comercial de $F\#$ que melhor se adequa ao valor calculado.

(d) Expresse a resolução angular φ do olho humano como uma função da separação mínima entre pontos distinguíveis l, localizados a uma distância de z dos olhos.

3.20 Lei de Bragg e difração de raios-X

(a) Calcule a diferença de caminho percorrido pelos raios de luz que interagem com o primeiro e com o segundo plano atômico. Sua resposta pode ser escrita em função da distância interplanar d e o ângulo de incidência θ.

(b) A partir da informação da densidade do cloreto de sódio, calcule a distância entre os planos atômicos. Em seguida, faça uma aplicação direta da expressão deduzida no item anterior.

(c) Observe a ordem de grandeza dos comprimentos de onda das ondas eletromagnéticas envolvidas no problema.

Parte III

Soluções

1

Mecânica da Partícula

1.1 Barcos em formação triangular

(a) Pela simetria do problema, as três embarcações sempre formarão um triângulo equilátero entre a condição inicial e o instante de encontro simultâneo entre elas no centro C do triângulo equilátero. Adotando um sistema de coordenadas polares com centro em C, podemos escrever a velocidade das três embarcações como sendo

$$\vec{v} = (v_r, v_\theta) = (-v\cos 30^o, v\text{sen}30^o) = \left(-\frac{v\sqrt{3}}{2}, \frac{v}{2}\right). \qquad (1.1)$$

A distância inicial das embarcações com respeito a C é dada pela distância do baricentro do triângulo a um de seus vértices, que é dada pela expressão $r_0 = \frac{2}{3}a\text{sen}60^o = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Sabendo que $v_r = \frac{dr}{dt} = -\frac{v\sqrt{3}}{2}$, escrevemos que a distância das embarcações com respeito ao centro C pode ser dada pela função horária

$$r(t) = r_0 + v_r t = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{v\sqrt{3}}{2}t. \qquad (1.2)$$

Assim, o tempo de encontro t_{enc} é dado pelo instante em que $r(t_{enc}) = 0$, obtendo o resultado

$$t_{enc} = \frac{2a}{3v}. \tag{1.3}$$

(b) A equação de movimento na coordenada polar é dada por

$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{2} \tag{1.4}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{2r} = \frac{-1}{\sqrt{3}r}\frac{dr}{dt} \tag{1.5}$$

$$-\sqrt{3}d\theta = \frac{dr}{r}. \tag{1.6}$$

Integrando essa equação, temos que

$$-\sqrt{3}(\theta - \theta_0) = ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \tag{1.7}$$

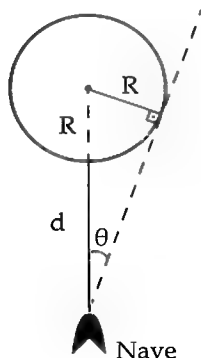
aplicando as condições iniciais $r_0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ e $\theta_0 = 0$, podemos chegar a seguinte equação de trajetória

$$r(\theta) = \frac{a\sqrt{3}}{3}e^{-\sqrt{3}\theta}. \tag{1.8}$$

1.2 Desvio de um asteroide

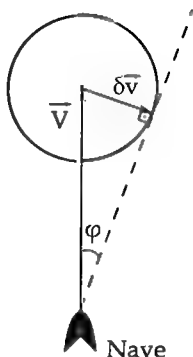
Observe a figura a seguir, onde podemos ver as dimensões do asteroide e sua distância da nave espacial. Traçando uma reta tangente ao asteroide que passa pela nave concluímos que o a alteração de velocidade

$\delta\vec{v}$ deve ser capaz de alterar a direção em um ângulo de pelo menos

$$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{R}{R+d}\right) = 0,28. \tag{1.9}$$

Observe agora o vetor velocidade inicial da nave $\vec{V}$ e os possíveis vetores finais $\vec{V}'$. Como o módulo de $\delta\vec{v}$ é bem definido, as extremidades dos possíveis vetores $\vec{V}'$ descrevem uma circunferência. Essa figura de velocidades é semelhante a figura de distâncias mostrada anteriormente.

Nessa segunda figura verifica-se que a máxima mudança de direção possível é dada pelo ângulo

$$\theta_{max} = \text{arcsen}\left(\frac{\delta v}{V}\right) = 0,3. \tag{1.10}$$

Como $\theta < \theta_{max}$, então a colisão pode ser evitada com o uso dos propulsores de emergência do foguete. O dia está salvo.

1.3 Alcance do Chafariz

(a) A altura máxima H é atingida por um jato de água orientado na direção vertical. Nessa situação estamos tratando de um lançamento vertical, cuja altura máxima é dada pelo resultado

$$H = \frac{v^2}{2g}. \tag{1.11}$$

(b) O raio de isolamento r é determinado pelo alcance de um lançamento oblíquo com velocidade v e com ângulo de inclinação θ dado por $r(\theta) = \frac{v^2}{g}\text{sen}(2\theta)$, maximizado quando $\theta = 45^o$, resultando em um raio de isolamento

$$r_{max} = r(45^o) = \frac{v^2}{g}. \tag{1.12}$$

(c) Considere a fonte de água como a origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Seja P um ponto cujas coordenadas são (x_p, y_p).

A trajetória de um jato de água, lançado com ângulo de inclinação θ com a horizontal, descreve uma parábola cuja equação é dada

por

$$y = tg\theta x - \frac{gx^2}{2v^2}\sec^2\theta. \tag{1.13}$$

Vamos determinar qual o ângulo de lançamento θ necessário para que o jato de água atinja P, para isso usamos a identidade trigonométrica $1 + tg^2\theta = \sec^2\theta$ e reescrevemos a trajetória do jato de água como uma equação de segundo grau em $tg\theta$:

$$\frac{gx^2}{2v^2}tg^2\theta - xtg\theta + \left(y + \frac{gx^2}{2v^2}\right) = 0. \tag{1.14}$$

Essa equação pode dispor de duas soluções, caso P esteja no interior da região pontilhada; de uma solução única, caso P esteja sobre a região pontilhada; ou pode não ter solução real, caso P esteja fora da região determinada pela linha pontilhada. Uma vez que a linha de segurança é determinada pelo caso de solução única da equação de segundo grau, sua equação pode ser obtida fazendo $\Delta = 0$:

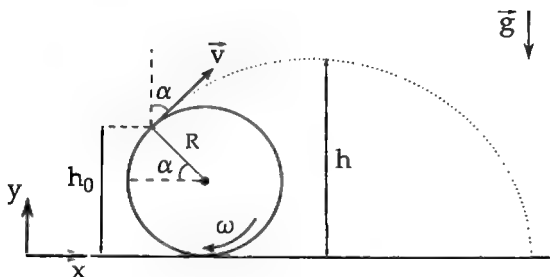
$$x^2 - 4\left(\frac{gx^2}{2v^2}\right)\left(y + \frac{gx^2}{2v^2}\right) = 0 \tag{1.15}$$

$$y = \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2}. \tag{1.16}$$

Assim, concluímos que a linha de segurança tem o formato de uma parábola, sendo chamada usualmente de "parábola de segurança". Note que os pontos $\left(0, \frac{v^2}{2g}\right)$ e $\left(\pm\frac{v^2}{g}, 0\right)$, determinados nos itens anteriores, pertencem à parábola.

1.4 Carro no atoleiro

Considere que a lama permanece em contato com a roda até um ângulo α, mostrado na figura a seguir. Nesse instante, a lama se descola

da roda e inicia um movimento parabólico a partir de uma altura inicial $h_0 = R(1 + \text{sen}\ \alpha)$ e atingindo uma altura máxima h.

No momento inicial, a componente vertical da velocidade inicial da lama é dada por $v_{0,y} = v \cos\alpha$. A equação horária que descreve a trajetória é dada por $h = h_0 + v_{0,y}t - \frac{gt^2}{2}$, que leva a seguinte expressão de altura $H(\alpha)$ máxima do lançamento oblíquo para um ângulo de lançamento α

$$H(\alpha) = h_0 + \frac{v_{0,y}^2}{2g} \tag{1.17}$$

$$H(\alpha) = R(1 + sen\alpha) + \frac{v^2}{2g}\cos^2\alpha. \tag{1.18}$$

É necessário agora determinar o máximo valor possível de $H(\alpha)$ atingido quando $\alpha = \alpha^*$, que satisfaz a equação

$$\frac{dH}{d\alpha} = R\cos\alpha^* - \frac{v^2}{g}\cos\alpha^* sen\alpha^* = 0. \tag{1.19}$$

Implicando que $\cos\alpha^* = 0$ ou $\text{sen}\alpha^* = \frac{gR}{v^2}$. Para se identificar qual desses pontos corresponde ao valor máximo, pode-se investigar a segunda derivada da função $H(\alpha)$ ou simplesmente verificar que a primeira solução gera uma altura $H' = R$, menor que a gerada pela

segunda solução

$$H = \frac{v^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{Rg}{v^2}\right)^2\right] + R\left(1 + \frac{Rg}{v^2}\right) \tag{1.20}$$

$$H = R + \frac{v^2}{2g} + \frac{gR^2}{2v^2}. \tag{1.21}$$

1.5 Deslizamento bidimensional no plano inclinado

O coeficiente de atrito entre o bloco e o plano inclinado pode ser obtido a partir da informação que qualquer impulso ladeira abaixo é capaz de fazer o bloco deslizar. Dessa afirmação conclui-se que $f_{at} = mg\text{sen}\alpha$, mas $f_{at} = \mu mg\cos\alpha$. Combinando esses resultados, temos que

$$\mu = \text{tg}\alpha, \tag{1.22}$$

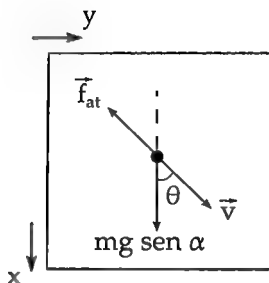
o que implica em $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$ e $\text{sen}\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

Denomine como x a direção de máximo declive da ladeira e y a direção horizontal da velocidade inicial. Sabemos que a componente da força peso que tende a acelerar o movimento é orientada na direção x e vale $mg\text{sen}\alpha$, enquanto a força de atrito vale sempre $\mu mg\cos\alpha$ e tem a mesma direção e sentido oposto ao vetor velocidade $\vec{v}$ do bloco.

Seja θ o ângulo entre a direção x e o vetor velocidade $\vec{v}$, cujas componentes nas direções x e y são denominadas de v_x e v_y, respectivamente.

Podemos escrever a equação de movimento na direção x como

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg\text{sen}\alpha - \mu mg\cos\alpha\cos\theta$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}(1 - \cos\theta). \tag{1.23}$$

Vista superior do plano inclinado

Note ainda que, tomando as componentes das forças na direção instantânea do vetor velocidade, é possível calcular a variação do seu módulo

$$m\frac{dv}{dt} = mg\text{sen}\alpha\cos\theta - \mu mg\cos\alpha$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}(1-\cos\theta). \tag{1.24}$$

Logo, segue que

$$m\frac{d}{dt}(v+v_x) = 0, \tag{1.25}$$

o que nos leva a concluir que a quantidade $(v + v_x) = v_0$ se conserva no movimento. O seu valor v_0 é obtido considerando o instante inicial do movimento.

A equação de movimento na direção y do bloco é dada por

$$m\frac{dv_y}{dt} = -\mu mg\cos\alpha\text{sen}\theta, \tag{1.26}$$

implicando que v_y, cujo valor inicial é v_0, diminui com o passar do tempo até atingir um valor nulo e a força de atrito passa a ter projeção apenas

na direção x. Logo $v_y(t \to \infty) = 0$, o que implica que, na condição $t \to \infty$, temos $v = v_x$. Portanto, segue diretamente da equação 1.25 que

$$v(t \to \infty) = \frac{v_0}{2}. \tag{1.27}$$

1.6 A corrente e a balança (OIbF)

(a) A porção da corda de comprimento z, em contato com a superfície da balança, tem uma massa proporcional ao seu comprimento, isto é, $m(z) = \frac{Mz}{L}$ .O valor da tração do elo que sustenta essa porção da corda é obtido diretamente através do equilíbrio de forças na vertical

$$T(z) = m(z)g = \frac{Mgz}{L}. \tag{1.28}$$

(b) No instante em que a corda é solta, todos os seus elos iniciam um mesmo movimento de queda livre com aceleração g. Nessa situação há qualquer tensão na corda e a tração se anula em todos os seus pontos.

(c) Para resolver esse problema, vamos recorrer a definição de força resultante de um sistema como sendo igual à sua taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear

$$F = dP/dt. \tag{1.29}$$

Após t segundos, todos os elos que ainda não tocaram a balança desceram uma distância $\Delta z = \frac{1}{2}gt^2$, restando, portanto, uma massa de corrente em queda de

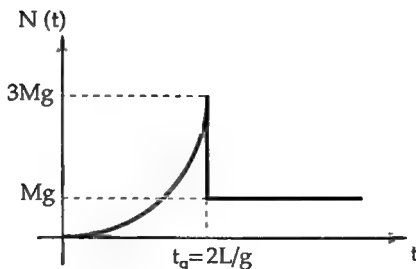
$$M' = \frac{M}{L}\left(L - \frac{1}{2}gt^2\right) = M\left(1 - \frac{gt^2}{2L}\right). \tag{1.30}$$

A velocidade dessa porção da corda é dada por $v' = gt$. Nesse instante, a quantidade de movimento do sistema pode ser escrita como

$$P = M'v' = M\left(gt - \frac{g^2t^3}{2L}\right) \tag{1.31}$$

Da definição de força resultante, expressa pela equação 1.29, temos que

$$Mg - N = \frac{dP}{dt} = Mg - \frac{3Mg^2t^2}{2L}$$
$$N = \frac{3Mg^2t^2}{2L}. \tag{1.32}$$

A queda da corda dura $t_q = 2L/g$. Dessa forma, durante a queda a leitura da balança varia parabolicamente de 0 até $3Mg$. Após a queda completa da corda, a leitura da balança sofre uma descontinuidade e passa a ser constante, com valor Mg. O comportamento da força normal de contato em função do tempo está mostrado no gráfico a seguir.

1.7 Máquina de Atwood com infinitas massas

Vamos demonstrar que uma máquina de Atwood de duas massas, m_1 e m_2, pode ser substituído por uma massa efetiva de valor μ. No referencial em que a máquina está em repouso, dispomos das seguintes equações de dinâmica

$$T - m_1 g = m_1 a$$

$$m_2 g - T = m_2 a$$

Tais equações resultam no seguinte valor para tensão da corda que liga as duas massas

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g, \tag{1.33}$$

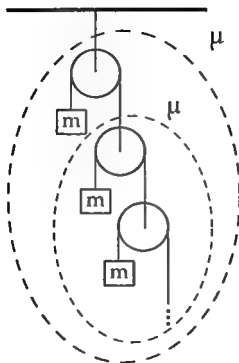
e a um valor de aceleração dado por

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g. \tag{1.34}$$

Aplicando o equilíbrio de forças na polia, concluímos que a força que mantém a máquina de Atwood em equilíbrio é dada por $F = 2T$, a massa efetiva é obtida fazendo $F = \mu g$. Deduzimos, portanto, que a massa efetiva de uma máquina de Atwood de máquina m_1 e m_2 é dada por

$$\mu = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.35}$$

Exposto esse resultado, basta notar agora que a massa efetiva de infinitas massas não se altera caso desprezemos uma das polias, ambas sendo iguais a um determinado valor μ, que mantém-se constante caso adicionemos ou retiremos uma polia com massa m ao sistema. Veja a figura a seguir.

Dessa maneira, a massa efetiva do sistema inteiro deve satisfazer a

relação

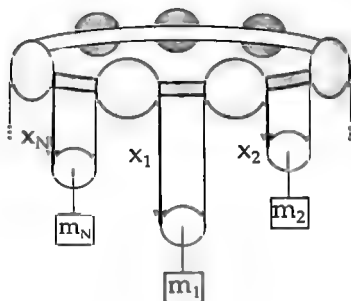
$$\mu = \frac{4m\mu}{m+\mu}, \tag{1.36}$$

que nos leva ao resultado $\mu = 3m$. Assim, podemos substituir todas as polias, excetuando-se a primeira por uma massa efetiva μ. Aplicando o resultado de aceleração da máquina de Atwood simples, chegamos ao seguinte valor de aceleração a_1 para a primeira polia

$$a_1 = \frac{3m - m}{3m + m} g = \frac{g}{2}. \tag{1.37}$$

1.8 Anel de polias

Considerando a posição x_i de cada massa m_i, o comprimento total da corda que passa pelas $2N$ polias pode ser escrito como $L = 2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_N$. Diferenciando com respeito ao tempo, podemos escrever $\sum_{i=1}^{N} v_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{N} a_i = 0$.

A equação de movimento da massa m_i pode ser escrita da seguinte

maneira

$$m_i a_i = mg - 2T$$

$$a_i = g - \frac{2T}{m_i}. \tag{1.38}$$

Somando todos os valores de a_i, chegamos ao valor da tensão da corda que liga as polias

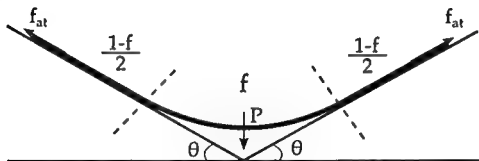
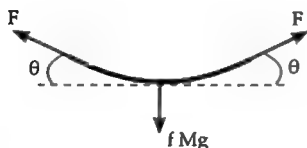
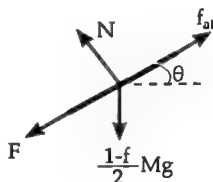
$$0 = Ng - 2T\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{m_k}$$

$$T = \frac{Ng}{2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{m_k}}. \tag{1.39}$$

Dessa maneira, calculamos a aceleração a_i a partir da equação 1.38

$$a_i = g - \frac{1}{m_i}\frac{Ng}{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{m_k}}. \tag{1.40}$$

1.9 Corda suspensa no plano inclinado (EUA)

Vamos dividir a corda em três partes: a parte suspensa, que corresponde a uma fração f da corda, e duas partes de fração $(1-f)/2$ apoiadas em cada um dos planos inclinados, como mostra a figura a seguir.

Representando por F a força de tração entre a parte suspensa da corda e suas partes apoiadas, podemos construir os seguintes diagramas de forças para cada uma dessas porções do corpo.

Da parte apoiada no plano inclinado, o equilíbrio na direção tangencial ao plano garante que

$$F + \frac{1-f}{2} Mg\text{sen}\theta = f_{at}, \tag{1.41}$$

enquanto a direção normal garante que

$$N = \frac{1-f}{2} Mg\cos\theta. \tag{1.42}$$

Na condição do limiar do deslizamento, a relação $f_{at} = \mu N = N$ deve ser satisfeita. Logo, a força F é dada por

$$F = \frac{1-f}{2} Mg(\cos\theta - \text{sen}\theta). \tag{1.43}$$

Escrevendo a condição do equilíbrio de forças na direção vertical da parte suspensa da corda, temos que $fMg = 2F\text{sen}\theta$. Substituindo o valor encontrado de F, obtemos

$$f = \text{sen}\theta(1-f)(\cos\theta - \text{sen}\theta)$$

$$\frac{f}{1-f} = \text{sen}\theta(\cos\theta - \text{sen}\theta). \tag{1.44}$$

Observe agora que a função do lado esquerdo cresce monotonicamente com f no intervalo $[0,1]$, que constituem os valores possíveis da fração suspensa da corda. Logo, se f é maximizado, $F = \frac{f}{1-f}$ também é. Vamos determinar o ângulo que maximiza

$$g(\theta) = \text{sen}\theta(\cos\theta - \text{sen}\theta)$$

$$g(\theta) = \text{sen}\theta\cos\theta - \text{sen}^2\theta. \tag{1.45}$$

Derivando essa expressão com respeito a θ, temos

$$g'(\theta) = \cos^2\theta - \text{sen}^2 - 2\text{sen}\theta\cos\theta$$

$$g'(\theta) = \cos 2\theta - \text{sen}2\theta = 0. \tag{1.46}$$

A condição de maximização de $g(\theta)$ é satisfeita quando $2\theta = \pi/4$, o que implica em

$$\theta = \frac{\pi}{8}. \tag{1.47}$$

Levando ao valor f da fração suspensa da corda

$$\frac{f}{1-f} = \text{sen}\theta\cos\theta - \text{sen}^2\theta = \frac{\text{sen}2\theta}{2} - \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)$$

$$\frac{f}{1-f} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$f = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}. \tag{1.48}$$

1.10 Cavidade em um planeta

(a) Utilizando o princípio da superposição, podemos trocar esse sistema, que carece de simetria, por dois sistemas simétricos. Para isso, basta notar que um planeta de densidade ρ, com uma cavidade, pode ser substituído por um planeta P_+, de densidade ρ, sem cavidade e um planeta P_- de "massa negativa", de densidade $-\rho$, contido no volume da cavidade e que gera uma "gravidade repulsiva". Essa abordagem utilizando uma massa negativa não tem interpretação física direta, trata-se essencialmente de um artifício matemático para a resolução do problema.

A gravidade sentida em A pelos planetas P_+ e P_- são, respectivamente

$$g_+ = \frac{GM_+}{R^2} = \frac{G}{R^2}\left(\rho\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$g_+ = \frac{4}{3}\rho\pi GR, \tag{1.49}$$

e

$$g_- = -\frac{GM_-}{d^2} = -\frac{4}{3}\rho\pi G\frac{r^3}{d^2}. \tag{1.50}$$

A gravidade efetiva sentida em A é a soma dos efeitos de g_+ e g_-,

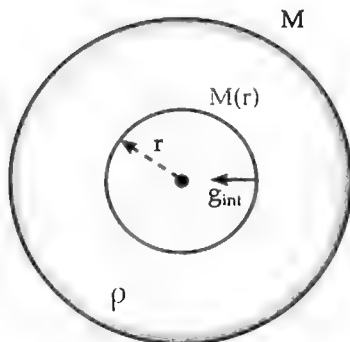
segundo o princípio da superposição

$$g_A = g_+ + g_- = \frac{4}{3}\rho\pi G\left(R - \frac{r^3}{d^2}\right). \tag{1.51}$$

Perceba agora que, por definição, $g_0 = g_+$. De tal forma que podemos calcular o parâmetro desejado r da seguinte maneira

$$r = \frac{g_0 - g}{g_0} = \frac{\frac{4}{3}\rho\pi GR - \frac{4}{3}\rho\pi G\left(R - \frac{r^3}{d^2}\right)}{\frac{4}{3}\rho\pi GR}$$

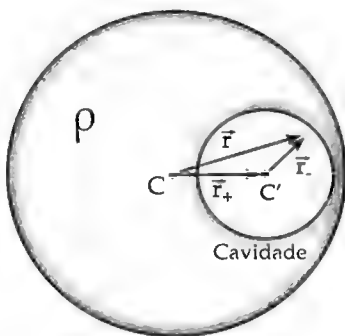
$$r = \frac{r^3}{d^2 R}. \tag{1.52}$$

(b) Para resolver esse problema, é necessário aplicar o mesmo conceito de superposição aplicado no item anterior. Basta calcular, portanto, os campos gravitacionais g_+ e g_-, agora no interior da cavidade.

O campo gravitacional no interior de um planeta uniforme, a uma distância r do seu centro, depende apenas da quantidade de massa contida em uma esfera de raio r concêntrica ao planeta. Assim, a gravidade no interior dessa planeta é dada por

$$g_{int} = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{G}{r^2}\left(\rho\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\rho\pi G r, \tag{1.53}$$

isto é, varia linearmente com a distância ao centro do planeta. Vetorialmente, escrevemos

$$\vec{g}_{int} = -\frac{4}{3}\rho\pi G\vec{r}. \tag{1.54}$$

Tome agora um ponto A' no interior da cavidade, localizado pelos vetores $\vec{r}_+$ e $\vec{r}_-$, com respeito aos centros dos planetas P_+ e P_-, utilizados no princípio da superposição. Seja ainda $\vec{r}_{CC'}$ o vetor que liga o centro do planeta P ao centro de sua cavidade interna, conforme mostra a figura a seguir.

O princípio da superposição garante que o campo gravitacional sentido no ponto A' é dado por

$$\vec{g} = g_+ + g_- = -\frac{4}{3}\rho\pi G\vec{r}_+ + \frac{4}{3}\rho\pi G\vec{r}_-$$

$$\vec{g} = -\frac{4}{3}\rho\pi G\left(\vec{r}_+ - \vec{r}_-\right) = -\frac{4}{3}\rho\pi G\vec{r}_{CC'}. \tag{1.55}$$

Logo, o campo no interior da gravidade depende apenas das posições relativas entre os centros do planeta P ao centro de sua cavidade interna. Portanto, é um vetor constante em toda a cavidade.

1.11 Queda Livre Espacial

(a) Na situação em que $M >> m$, podemos considerar que M permanece fixa e m inicia um movimento de queda em direção a massa sob a ação da força gravitacional $F_g = \frac{GMm}{r^2}$, onde r é a distância entre os dois corpos.

Podemos escrever a equação de movimento da massa m utilizando a segunda lei de Newton

$$F_g = ma$$

$$a = \frac{GM}{r^2} = -r''$$

$$rr'' = -GM. \tag{1.56}$$

Resolver a equação diferencial 1.56 e determinar o tempo necessário para que os corpos se choquem não é um problema trivial, de tal forma que é necessário buscar um método alternativo para resolver o problema.

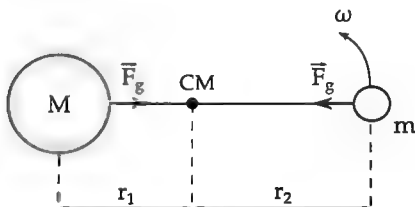
A trajetória da massa é uma reta de comprimento D, que pode ser identificada como uma elipse degenerada de semieixo maior $a = D/2$ e semieixo menor $b = 0$. Os focos da elipse degenerada ficam nas posições iniciais das massas e sua excentricidade é igual a 1. Dessa maneira, o tempo desejado corresponde a metade do

período de uma elipse de semieixo maior a, que pode ser, por sua vez, calculado a partir da terceira lei de Kepler

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{1.57}$$

$$\frac{(2\Delta t)^2}{(D/2)^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

$$\Delta t = \pi\sqrt{\frac{D^3}{8GM}}. \tag{1.58}$$

(b) Nesse item é necessário escrever a terceira lei de Kepler para um sistema de dois corpos de massa M e m. A expressão pode ser encontrada de maneira simplificada, tomando o caso específico do movimento circular das duas massas em torno do centro de massa do sistema.

O raio da órbita do corpo de massa M é dado por $r_1 = \frac{m}{m+M}r$ e o raio da massa m é dado por $r_2 = \frac{M}{m+M}r$. Igualando a força gravitacional à força centrípeta e considerando a massa M, temos que

$$\frac{GMm}{r^2} = M\omega^2 r_1$$

$$\frac{Gm}{r^2} = \omega^2 \frac{mr}{M+m}$$

$$\frac{G(M+m)}{r^3} = \omega^2. \tag{1.59}$$

Utilizando a relação $\omega = \frac{2\pi}{T}$, chegamos a terceira lei de Kepler para um sistema de dois corpos

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \tag{1.60}$$

Apesar de termos provado essa relação para o caso particular do movimento circular, ela também é verdadeira para movimentos elípticos, substituindo o raio da órbita circular r pelo semieixo maior a. Dessa maneira, aproveita-se o resultado do item (a), bastando alterar a massa M na expressão final pela massa total do sistema $M + m$, encontrando a resposta

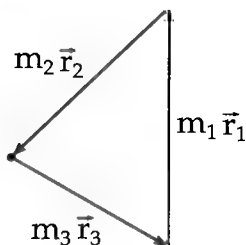
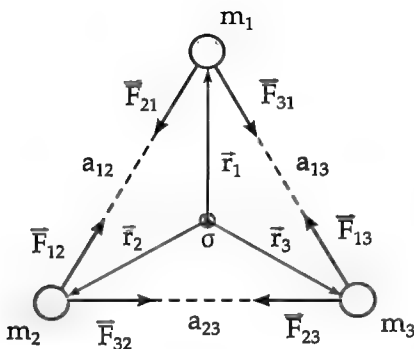
$$\Delta t = \pi\sqrt{\frac{D^3}{8G(M+m)}}. \tag{1.61}$$

1.12 Triângulo planetário (IPhO)

Utilize o centro de massa do triângulo, que está contido no $\Delta P_1 P_2 P_3$, como origem do nosso sistema de referência. Sejam $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_3$ os vetores que localizam os planetas P_1, P_2 e P_3, respectivamente. Seja ainda a força $\vec{F}_{ij}$ a força de atração que o planeta i sofre devido à sua interação gravitacional com o planeta j.

Devido ao sistema de coordenadas escolhido, temos que

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = (m_1 + m_2 + m_3)\vec{R}_{CM} = 0. \tag{1.62}$$

Isso garante que esses três vetores fecham o triângulo mostrado na figura a seguir.

Vamos escrever agora a força resultante sobre o planeta 1 e igualar o resultado à resultante centrípeta $\vec{R}_1 = -m_1\omega^2\vec{r}_1$, necessária para fazê-lo realizar um movimento circular em torno do centro de massa

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

$$-m_1\omega^2\vec{r}_1 = \frac{Gm_1m_2}{a_{12}^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{Gm_1m_3}{a_{13}^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1).$$

O que nos leva ao seguinte resultado

$$\left(\omega^2 - \frac{Gm_2}{a_{12}^3} - \frac{Gm_3}{a_{13}^3}\right)\vec{r}_1 + \left(\frac{Gm_2}{a_{12}^3}\right)\vec{r}_2 + \left(\frac{Gm_3}{a_{13}^3}\right)\vec{r}_3 = 0. \quad (1.63)$$

Repetindo raciocínios análogos para os planetas P_2 e P_3, chegamos às seguintes equações

$$\left(\frac{Gm_1}{a_{12}^3}\right)\vec{r}_1 + \left(\omega^2 - \frac{Gm_1}{a_{12}^3} - \frac{Gm_3}{a_{23}^3}\right)\vec{r}_2 + \left(\frac{Gm_3}{a_{23}^3}\right)\vec{r}_3 = 0 \quad (1.64)$$

$$\left(\frac{Gm_1}{a_{13}^3}\right)\vec{r}_1 + \left(\frac{Gm_2}{a_{23}^3}\right)\vec{r}_2 + \left(\omega^2 - \frac{Gm_1}{a_{13}^3} - \frac{Gm_2}{a_{23}^3}\right)\vec{r}_3 = 0. \quad (1.65)$$

Cada uma dessas equações representam três vetores paralelos a $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_3$, respectivamente, e que fecham um triângulo, assim como mostrado na ilustração anterior. Acontece que, devido a esse paralelismo, todos esses triângulos são semelhantes. Os coeficientes que multiplicam os vetores $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_3$ devem ser, portanto, proporcionais a m_1, m_2 e m_3 por conta da equação 1.62. Dessa maneira, chegamos as seguintes relações

$$\frac{\left(\omega^2 - \frac{Gm_2}{a_{12}^3} - \frac{Gm_3}{a_{13}^3}\right)}{m_1} = \frac{G}{a_{12}^3} = \frac{G}{a_{13}^3}$$

$$\frac{G}{a_{12}^3} = \frac{\left(\omega^2 - \frac{Gm_1}{a_{12}^3} - \frac{Gm_3}{a_{23}^3}\right)}{m_2} = \frac{G}{a_{23}^3} \quad (1.66)$$

$$\frac{G}{a_{13}^3} = \frac{G}{a_{23}^3} = \frac{\left(\omega^2 - \frac{Gm_1}{a_{13}^3} - \frac{Gm_2}{a_{23}^3}\right)}{m_3}$$

Da primeira proporção, temos que $a_{12} = a_{13}$ e da segunda, tem-se que $a_{12} = a_{23}$. Dessa maneira, concluímos que $\Delta P_1P_2P_3$ deve ser

equilátero

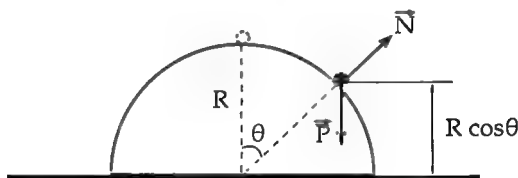
$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = a. \tag{1.67}$$

Resta agora determinar o valor de ω que satisfaça o problema para um dado valor de a. A partir da primeira proporção, temos que

$$\frac{\left(\omega^2 - \frac{Gm_2}{a^3} - \frac{Gm_3}{a^3}\right)}{m_1} = \frac{G}{a^3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3}}. \tag{1.68}$$

1.13 Iglu

(a) Inicialmente, vamos determinar a velocidade da partícula de massa m como uma função do ângulo θ através do princípio da conservação de energia.

Veja:

$$mgR = \frac{mv^2}{2} + mgR\cos\theta$$

$$v = \sqrt{2Rg(1 - \cos\theta)}. \tag{1.69}$$

A força resultante centrípeta desse movimento é dada por $F_{cp} = mg\cos\theta - N$, daí escrevemos

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}. \tag{1.70}$$

Substituindo o resultado obtido através da conservação de energia, obtemos a equação

$$mg\cos\theta - N = 2mg(1-\cos\theta). \tag{1.71}$$

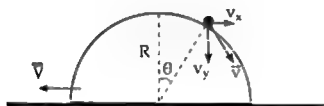
Para obter o ângulo em que a partícula descola do iglu, basta fazer $N = 0$. Segue, portanto, que

$$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right). \tag{1.72}$$

(b) Nessa situação, o iglu não permanece mais em repouso. Para determinar a velocidade $\vec{v}$ da partícula, cujas componentes no referencial do chão são v_x e v_y, assim como a velocidade horizontal V do iglu, é necessário combinar a conservação de energia e da quantidade de movimento total do sistema.

Referencial do solo:

Referencial do iglu:

A conservação de momento da direção horizontal garante que

$$MV = mv_x. \tag{1.73}$$

Conservando a energia do sistema, escrevemos

$$mgR(1-\cos\theta) = \frac{MV^2}{2} + \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2). \tag{1.74}$$

No referencial do iglu, a partícula descreve uma trajetória circular de raio R, o que garante que

$$\text{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x + V} = \frac{v_y}{V\left[1 + \frac{M}{m}\right]}. \tag{1.75}$$

É importante destacar que referencial do iglu não é inercial, pelo fato do iglu sofrer uma aceleração pela interação com a partícula de massa m via força de contato. No entanto, no instante em que a partícula e o iglu perdem o contato, a força de contato de torna nula, fazendo a aceleração do iglu se torne nula, o que nos permite utilizar as leis de Newton normalmente. Em particular, vamos utilizar novamente a equação 1.70, fazendo $N = 0$ e $v = \sqrt{(v_x^2 + V^2)^2 + v_y^2}$. Dessa maneira, temos que

$$Rg\cos\theta = (v_x^2 + V^2)^2 + v_y^2. \tag{1.76}$$

Definindo $\lambda = m/M$, segue da equação 1.73 que $V = \lambda v_x$. As equações anteriores podem ser reescritas como

$$2gR(1 - \cos\theta) = (1 + \lambda)v_x^2 + v_y^2$$

$$(1 + \lambda)\lambda\text{tg}\theta v_x = v_y \tag{1.77}$$

$$Rg\cos\theta = (1 + \lambda)^2 v_x^2 + v_y^2.$$

Substituindo v_y, que está isolado pela segunda equação, temos

$$2gR(1 - \cos\theta) = v_x^2(1 + \lambda)(1 + (1 + \lambda)\lambda^2\text{tg}^2\theta)$$

$$Rg\cos\theta = (1 + \lambda)^2 v_x^2(1 + \lambda^2\text{tg}^2\theta). \tag{1.78}$$

Dividindo a primeira equação pela segunda, segue que

$$\frac{2(1-\cos\theta)}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{1+\lambda} + \lambda^2 \mathrm{tg}^2\theta}{1+\lambda^2\mathrm{tg}^2\theta}. \tag{1.79}$$

Observamos na última equação que o ângulo θ está completamente determinado pelo valor da razão das massas λ.

Pode-se ainda reescrever essa equação apenas em termos de $\cos\theta$,multiplicando o lado direito da equação por $\cos^2\theta$ e fazendo uso da relação fundamental da trigonometria, veja

$$\frac{2(1-\cos\theta)}{\cos\theta} = \frac{\frac{\cos^2\theta}{1+\lambda} + \lambda^2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta + \lambda^2(1-\cos^2\theta)}, \tag{1.80}$$

que nos leva, após um pouco de álgebra, a uma equação polinomial de terceiro grau em $\cos\theta$ completa

$$\begin{aligned}(3\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda - 3)\cos^3\theta + 2(1-\lambda)(1+\lambda)^2\cos^2\theta \\ -2\lambda^2(1+\lambda)\cos\theta + \lambda^2(1+\lambda) = 0,\end{aligned} \tag{1.81}$$

que pode ser resolvida por métodos numéricos, caso o valor de λ seja fornecido.

1.14 Movimento de um foguete

(a) Considere um instante t em que a massa do foguete é dada por m e sua velocidade é dada por V. O momento linear do sistema é dado pelo produto $P = mV$.

Considere agora um instante $t+dt$, uma quantidade de combustível $m_{gas} = -dm$ é expelida com velocidade $(V-u)$ e o foguete adquire

um incremento de velocidade dV. O momento linear do sistema agora pode ser escrito como

$$P = (m + dm)(V + dV) - dm(V - u). \tag{1.82}$$

Considerando o foguete como um sistema isolado, temos da conservação de P que

$$(m + dm)(V + dV) - dm(V - u) = mV, \tag{1.83}$$

que pode ter seus termos de segunda ordem desprezados, resultando em

$$mdV = -dmu$$

$$-\frac{dm}{m} = \frac{dV}{u}, \tag{1.84}$$

que integrada leva ao resultado

$$\ln\left(\frac{M_f}{M_0}\right) = -\frac{V}{u}$$

$$V = u \ln\left(\frac{M_0}{M_f}\right) \tag{1.85}$$

(b) Sabendo que a taxa de queima de combustível é constante, temos que

$$\mu = -\frac{dm}{dt} \rightarrow dm = -\mu dt. \tag{1.86}$$

Integrando essa equação no tempo e aplicando as condições iniciais, temos que a massa $M(t)$ é dada por

$$M(t) = M_0 - \mu t. \tag{1.87}$$

Levando ao resultado desejado

$$V(t) = u \ln \left(\frac{M_0}{M_0 - \mu t} \right)$$

$$V(t) = -u \ln \left(1 - \frac{\mu t}{M_0} \right). \tag{1.88}$$

1.15 Dinâmica de uma gota de chuva

(a) Utilizando a definição de λ, temos que

$$\lambda = \frac{dm}{Sdt}$$

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi r^2 \lambda. \tag{1.89}$$

Mas $m = \mu V$, onde μ é a densidade da água e $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ é o seu volume. Daí, obtemos o valor do elemento diferencial de massa $dm = \mu 4\pi r^2 dr$, o que implica em

$$\mu \frac{dr}{dt} = \lambda$$

$$r(t) = \frac{\lambda}{\mu} t. \tag{1.90}$$

(b) Escrevendo a segunda lei de Newton para um corpo de massa variável

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt}. \tag{1.91}$$

Substituindo $F = mg$, $\frac{dm}{dt} = 4\pi r^2\lambda$ e $\frac{dv}{dt} = a$, temos que

$$mg = 4\pi r^2 \lambda v + ma \tag{1.92}$$

e, em seguida, dividindo pela massa $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \mu$

$$g = \frac{3\lambda}{r\mu} v + a. \tag{1.93}$$

Utilizando o resultado do item anterior, representado pela equação 1.90, podemos isolar a aceleração a e chegar ao resultado desejado

$$a = g - \frac{3v}{t}. \tag{1.94}$$

(c) Temos, do item anterior que

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{3v}{t}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3v}{t} = g. \tag{1.95}$$

Para resolver essa equação diferencial, multiplique os dois lados da equação pelo fator integrante t^3

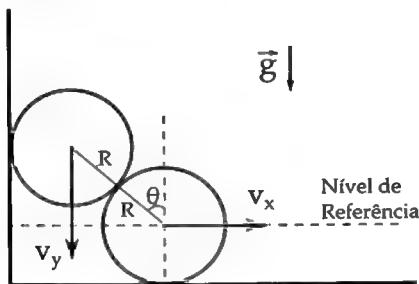
$$t^3 \frac{dv}{dt} + 3t^2 v = gt^3$$

$$\frac{d}{dt}(t^3 v) = gt^3. \tag{1.96}$$

Integrando a equação anterior no tempo, chegamos ao seguinte resultado

$$v(t) = \frac{gt}{4}. \tag{1.97}$$

1.16 Deslizamento de Cilindros

Considere que o cilindro de baixo inicia seu movimento para a direita no instante $t = 0$ e considere que os cilindros permanecem em contato até um instante $t = t'$. Considere um instante $0 < t < t'$, onde o segmento de reta que liga os centros faz um ângulo θ com a vertical, como mostra a figura a seguir.

Escrevendo a equação da conservação da energia mecânica do sistema, temos que

$$E_{ini} = E_{final}$$

$$mg2R = mg2R\cos\theta + \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2)$$

$$4gR(1 - \cos\theta) = v_x^2 + v_y^2 \tag{1.98}$$

Uma relação cinemática pode relacionar os valores de $v_x = \frac{dx}{dt}$ e $v_y = \frac{dy}{dt}$, onde x é a coordenada horizontal do cilindro inferior e y, a coordenada vertical do cilindro superior. Para isso, basta diferenciar os dois lados da equação $x^2 + y^2 = (2R)^2$ pelo tempo, obtendo assim

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$v_y = \frac{x}{y} v_x = \text{tg}\theta v_x. \tag{1.99}$$

Substituindo a equação 1.99 na equação 1.98:

$$4gR(1 - \cos\theta) = \sec^2\theta v_x^2$$

$$v_x^2 = 4gR(1 - \cos\theta)\cos^2\theta. \tag{1.100}$$

O valor de v_x inicia com valor nulo em $t = 0$ e cresce até atingir um valor máximo no instante $t = t'$, quando o ângulo θ assume o valor $\theta = \theta'$. Para obter o valor de θ', basta encontrar o ângulo θ que fornece um máximo de velocidade v_x ou, de forma equivalente, de v_x^2. Escrevemos portanto que

$$\frac{d(v_x^2)}{d\theta} = 0$$

$$\frac{d}{d\theta}(\cos^2\theta - \cos^3\theta) = 0$$

$$-2\cos\theta'\text{sen}\theta' + 3\cos^2\theta'\text{sen}\theta' = 0. \tag{1.101}$$

Como $\theta' \neq 0$ e $\theta' \neq \pi/2$, temos que

$$\cos\theta' = \frac{2}{3}. \tag{1.102}$$

Logo, os cilindros ficam em contato até que a equação $\theta = \theta'$ seja satisfeita. Nesse instante há o descolamento dos cilindros e o cilindro inferior adquire sua velocidade máxima V_{max}. Para obter o valor máximo de velocidade, basta substituir o valor de $\cos\theta'$:

$$V_{max}^2 = 4gR\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$V_{max} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{Rg}{3}}. \quad (1.103)$$

1.17 Viagem por dentro da Terra

Vamos considerar que o túnel construído não é capaz de alterar o campo gravitacional terrestre. Mostremos inicialmente que o campo gravitacional no interior da Terra varia linearmente com a distância do ponto considerado ao seu centro. Para mostrar isso, basta verificar que o campo gravitacional depende apenas da massa interna a uma esfera concêntrica ao planeta de raio r (ver o problema "cavidade em um planeta"). Temos, portanto que

$$g = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{G}{r^2}\left(\rho\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$g = \frac{4}{3}G\rho\pi r. \quad (1.104)$$

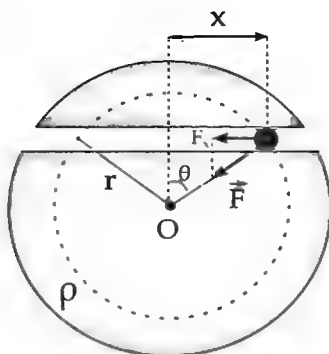
A força gravitacional é obtida fazendo $F = mg$, orientada sempre em direção ao centro da Terra. Note agora que apenas uma componente da força peso é interessante para o movimento do ônibus, a outra apenas empurra o ônibus contra as paredes do túnel. Veja a figura a seguir.

Assim, sendo θ um ângulo que localiza o ônibus dentro do túnel, temos que $x = r\text{sen}\theta$. A força restauradora desse movimento, que sempre joga o ônibus em direção ao ponto mais próximo do centro da Terra, é dada pela expressão

$$F_x = mg\text{sen}\theta = m\left(\frac{4}{3}G\rho\pi r\right)\frac{x}{r}$$

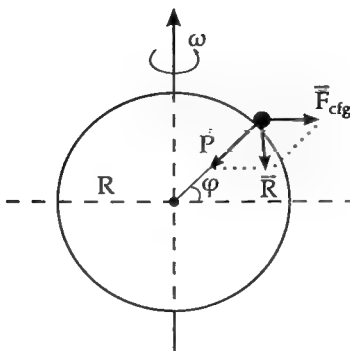
$$F_x = \frac{4}{3}G\rho m\pi x. \quad (1.105)$$

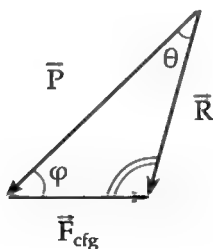
Como $F_x \propto x$, então o movimento do ônibus no túnel é um movi-

mento harmônico simples (MHS) de constante $K = \frac{4}{3}G\rho m\pi$. Como K não depende de qual túnel estamos considerando, concluímos que todos os túnel apresentam o mesmo tempo Δt de viagem entre dois pontos da superfície terrestre, que corresponde a metade de um período do MHS. Dessa forma,

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{4}{3}G\rho\pi} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}. \qquad (1.106)$$

1.18 Desvio da vertical do pêndulo (Brasil)

A força inercial responsável pelo desvio do pêndulo é a força centrífuga que surge devido a rotação da Terra. Essa força tem direção para fora do eixo de rotação terrestre e vale $F_{cfg} = m\omega^2 r$. Veja a figura a seguir com o diagrama de forças da massa do pêndulo na superfície terrestre. O ângulo θ é o ângulo entre o vetor da força peso e o vetor da força resultante sobre a massa do pêndulo.

Da geometria do problema, mostrada na figura anterior, temos que $F_{cfg} = m\omega^2 R\cos\varphi$. A força peso é vertical e orientada para baixo $\vec{P} = m\vec{g}$, no entanto a força resultante $\vec{R}$ percebida pelo referencial girante é a soma vetorial da força centrífuga com a força peso.

Considere o triângulo formado através da soma das forças que atuam sobre o pêndulo, resultando na força resultante $\vec{R}$ mostrado na figura a seguir.

Da lei dos senos da geometria plena, segue que

$$\frac{P}{\text{sen}(\pi - \theta - \varphi)} = \frac{F_{cfg}}{\text{sen}\theta}. \tag{1.107}$$

Desenvolvendo a expressão anterior, temos que

$$\frac{g}{\text{sen}(\theta+\varphi)} = \frac{\omega^2 R\cos\theta}{\text{sen}\theta}$$

$$\frac{g}{\omega^2 R\cos\theta} = \frac{\text{sen}(\theta+\varphi)}{\text{sen}\theta} = \cos\varphi + \frac{\text{sen}\varphi}{\text{tg}\theta}.$$

Isolando o termo que depende de θ na equação, obtemos o resultado procurado

$$\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\varphi}{\frac{g}{\omega^2 R\cos\theta} - \cos\varphi} = \frac{\text{sen}2\varphi}{2\left(\frac{g}{\omega^2 R} - \cos^2\varphi\right)}$$

$$\theta = \text{arctg}\left[\frac{\text{sen}2\varphi}{2\left(\frac{g}{\omega^2 R} - \cos^2\varphi\right)}\right]. \qquad (1.108)$$

1.19 Barco de guerra

(a) Seja V a velocidade do barco no instante t, ela pode ser obtida através da conservação da quantidade de movimento do sistema composto pelo barco e de suas balas, que é nulo devido a condição inicial do problema

$$0 = -(M - Ntm)V + Ntmv_0$$

$$V = \frac{Ntmv_0}{M - Ntm} \approx \frac{Nmv_0}{M}t. \qquad (1.109)$$

Devido ao fato de que $v_0 >> V$, assume-se a aproximação de que todas as balas viajam com velocidade v_0.

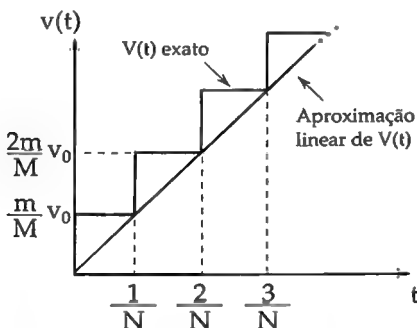
(b) Do item anterior, observamos que a velocidade do barco depende de maneira aproximadamente linear com o tempo, de tal forma

que podemos definir uma aceleração média para o barco, dada por

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{V}{t} = \frac{Nmv_0}{M}. \tag{1.110}$$

Como uma primeira aproximação podemos dizer que a distância d percorrida pelo barco pode ser estimada como

$$d(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{Nmv_0}{2M}t^2. \tag{1.111}$$

Esse resultado pode ser ainda refinado considerando que a velocidade assume valores discretos múltiplos de mv_0/M, devido ao fato de a aceleração que o barco sofre não ser uniforme.

Observe que existe uma área compreendida entre a curva $V = \frac{Nmv_0}{M}t$ e a curva real de $V(t)$, composta por degraus. Para uma melhor estimativa da distância percorrida de uma grandeza pelo barco, podemos calcular a distância que corresponde à soma das áreas desses Nt triângulos

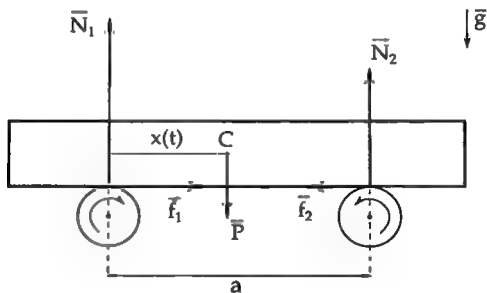
$$\Delta d = NtA_{\Delta} = Nt\left(\frac{1}{2}\frac{1}{N}\frac{mv_0}{M}\right)$$

$$\Delta d = \frac{1}{2}\frac{mv_0}{M}t. \tag{1.112}$$

A nossa estimativa final é dada, portanto, por

$$d(t) = \frac{Nmv_0}{2M}t^2 + \frac{1}{2}\frac{mv_0}{M}t. \tag{1.113}$$

1.20 Cilindros Rolantes

(a) Seja x a posição do centro de massa com respeito ao cilindro esquerdo, orientada da esquerda para a direita, e a a distância entre os centros dos dois cilindros.

O equilíbrio das componentes verticais das forças que atuam sobre a haste garante que

$$N_1 + N_2 = mg, \tag{1.114}$$

enquanto o equilíbrio de torques com respeito ao centro de massa garante que

$$N_1 x = N_2(a - x). \tag{1.115}$$

Dessas equações obtemos as forças normais N_1 e N_2

$$N_1 = mg\frac{a-x}{a}$$

$$N_2 = mg\frac{x}{a}. \tag{1.116}$$

A força resultante sobre a haste é resultado das forças de atrito entre ela e os dois cilindros. Temos, portanto, que

$$F = f_1 - f_2 = \mu(N_1 - N_2) = \mu mg\left(1 - \frac{2x}{a}\right) \tag{1.117}$$

Fazendo a mudança de variável $x' = x - \frac{a}{2}$, isto é, tomando o deslocamento a partir da sua posição de equilíbrio da haste, temos que

$$F = -\frac{2\mu mg}{a}x'. \tag{1.118}$$

Como o sistema descrito obedece a uma força dada pela forma $F = -kx'$, concluímos que a haste realiza um MHS com

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2\mu g}{a}}, \tag{1.119}$$

de tal forma que a posição da haste é dada pela equação

$$x(t) = \frac{a}{2} + \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{2\mu g}{a}}t\right) \tag{1.120}$$

(b) Para esse caso, temos que N_1 e N_2 tem o mesmo comportamento do item anterior. O que muda é apenas a direção das forças de atrito, o que faz com que a força resultante horizontal não seja mais restauradora, mas passe a contribuir para o aumento do deslocamento da haste.

$$F = -f_1 + f_2 = -\mu(N_1 - N_2) = \mu mg\left(\frac{2x}{a} - 1\right) \tag{1.121}$$

Tomando o deslocamento a partir da posição de equilíbrio $x' = x - \frac{a}{2}$, temos que

$$F = \frac{2\mu mg}{a}x'. \tag{1.122}$$

Aplicando a segunda lei de Newton $F = ma'$, temos que

$$a' = \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{2\mu g}{a}x', \tag{1.123}$$

cuja solução geral é dada por

$$x'(t) = Aexp\left[\sqrt{\frac{2\mu g}{a}}t\right] + Bexp\left[-\sqrt{\frac{2\mu g}{a}}t\right], \tag{1.124}$$

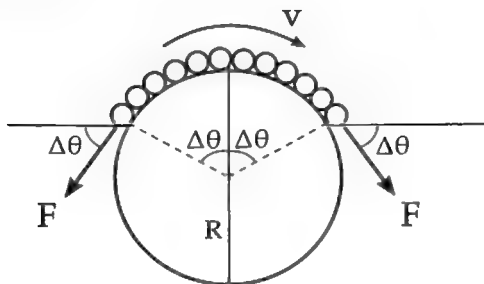
que pode ser reescrita de forma equivalente, em termos de cosseno e seno hiperbólicos

$$x'(t) = A\cosh\left(\sqrt{\frac{2\mu g}{a}}t\right) + B\text{senh}\left(\sqrt{\frac{2\mu g}{a}}t\right), \tag{1.125}$$

tomando $C_1 = \frac{A+B}{2}$ e $C_2 = \frac{A-B}{2}$. Aplicando as condições iniciais do movimento, verificamos que $C_1 = x_0$ e $C_2 = 0$. Segue, portanto que

$$x(t) = \frac{a}{2} + \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\cosh\left(\sqrt{\frac{2\mu g}{a}}t\right) \tag{1.126}$$

1.21 Corrente na polia

(a) Considere uma pequena porção de corda em contato com a polia, determinada por um pequeno ângulo de $2\Delta\theta$, e que descreve uma trajetória circular de raio R, conforme mostra a figura.

A massa dessa porção de corda é proporcional ao seu comprimento

$$m = \frac{2R\Delta\theta}{L}M. \tag{1.127}$$

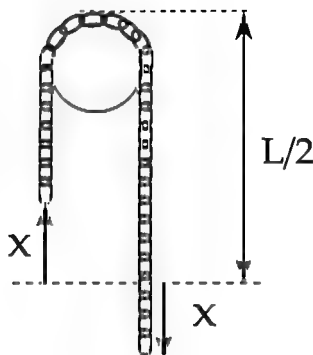
Podemos calcular a resultante centrípeta necessária para que essa corda realize tal movimento, chegando a expressão

$$F = \frac{mv^2}{R} = 2F\mathrm{sen}(\Delta\theta). \tag{1.128}$$

Para pequenos ângulos, pode-se aproximar o seno do ângulo $\Delta\theta$ pela sua medida em radianos, dessa forma

$$\left(\frac{2R\Delta\theta}{L}M\right)\frac{v^2}{R} = 2F\mathrm{sen}(\Delta\theta)$$

$$F = \frac{M}{L}v^2. \tag{1.129}$$

(b) Considere um deslocamento de x a partir da posição inicial da corda (mostrada na figura a seguir). Seja ainda $\rho = M/L$ a densidade linear da corda.

Podemos calcular a velocidade da corda conservando a energia mecânica do sistema, para isso precisamos calcular a posição do centro de massa da corda no instante inicial y_0:

$$y_0 = \frac{\frac{M}{2}\frac{L}{4} + \frac{M}{2}\frac{L}{4}}{M} = \frac{L}{4}, \qquad (1.130)$$

assim como a posição final y, dada por

$$y = \frac{\rho\frac{\left(\frac{L}{2}-x\right)^2}{2} + \rho\frac{\left(\frac{L}{2}+x\right)^2}{2}}{\rho L} = \frac{L}{4} + \frac{x^2}{L}, \qquad (1.131)$$

indicando que o centro de massa desce uma distância de x^2/L. Da conservação da energia mecânica, temos

$$Mg\frac{x^2}{L} = \frac{Mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2g}{L}} x. \tag{1.132}$$

Escrevendo a 2ª lei de Newton para cada uma das duas porções da corda, temos

$$F - \rho \left(\frac{L}{2} - x \right) g = \rho \left(\frac{L}{2} - x \right) a$$

$$\rho \left(\frac{L}{2} + x \right) - F = \rho \left(\frac{L}{2} + x \right) a, \tag{1.133}$$

em que a força $F = \rho v^2$ foi calculada no item anterior e a é a aceleração da corda. Substituindo o valor calculado de F e substituindo a, encontramos o valor

$$v^2 = \frac{2g}{L} \left[\left(\frac{L}{2} \right)^2 - x^2 \right]. \tag{1.134}$$

Comparando as equações 1.145 e 1.134, temos que

$$\left(\frac{L}{2} \right)^2 - x^2 = x^2$$

$$x = \frac{L}{2\sqrt{2}} \tag{1.135}$$

O que leva ao seguinte valor de velocidade

$$v = \frac{\sqrt{gL}}{2}. \tag{1.136}$$

1.22 Colisões bidimensionais

(a) Seja $\vec{v}_0$ a velocidade da partícula 1 antes da colisão, e sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ os vetores das partículas 1 e 2 após a colisão, respectivamente. Nesse item as duas massas tem massa idênticas, logo $m_1 = m_2 = m$.

Da conservação da quantidade de movimento, temos que

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \tag{1.137}$$

O que garante que

$$v_0^2 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2. \tag{1.138}$$

Por outro lado, a conservação de energia garante que

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$$

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2. \tag{1.139}$$

Das equações 1.138 e 1.139, temos que $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, ou seja, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são perpendiculares e, portanto,

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

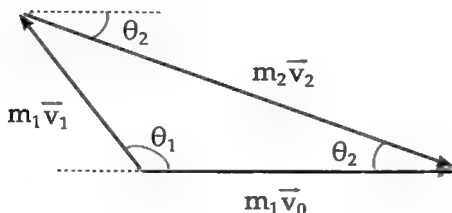
$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_2. \tag{1.140}$$

(b) Seja $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$. Da aplicação do princípio da conservação de energia mecânica, temos que

$$\frac{m_1\vec{v}_0}{2} = \frac{m_1\vec{v}_1}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2}{2}$$

$$v_0^2 = v_1^2 + \lambda v_2^2. \tag{1.141}$$

Considere a figura a seguir, que é associada à soma vetorial

$$m_1\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \tag{1.142}$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ilustrado na figura anterior

$$(m_2v_2)^2 = (m_1v_0)^2 + (m_1v_1)^2 - 2m_1^2v_0v_1\cos\theta_1$$

$$(\lambda v_2)^2 = v_0^2 + v_1^2 - 2v_0v_1\cos\theta_1 \tag{1.143}$$

Combinando as equações 1.141 e 1.143, chegamos a seguinte equação de segundo grau em v_1

$$(1+\lambda)v_1^2 - 2v_0\cos\theta_1 v_1 - (\lambda - 1)v_0^2 = 0. \tag{1.144}$$

Cuja solução é dada por

$$v_1 = v_0 \frac{\cos\theta_1 \pm \sqrt{(\cos\theta_1)^2 + (\lambda^2 - 1)}}{1 + \lambda}. \tag{1.145}$$

Da condição de existência de solução real da equação quadrática, chegamos ao resultado desejado

$$(\cos\theta_1)^2 + (\lambda^2 - 1) > 0$$

$$\lambda^2 > 1 - \cos^2\theta_1 = \text{sen}^2\theta_1 \tag{1.146}$$

Portanto, segue que

$$\text{sen}\theta_{max} = \lambda = \frac{m_2}{m_1}. \tag{1.147}$$

(c) Nesse caso, temos que $\lambda = \frac{m_2}{m_1} >> 1$. A equação 1.145 pode ser aproximada nesse limite da seguinte forma

$$v_1 \approx \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} v_0 \approx v_0. \tag{1.148}$$

Logo, o triângulo de vetores é aproximadamente isósceles.

Da soma dos ângulos internos do triângulo associado à conservação de quantidade de momento, expressa pela equação $m_1\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$, temos que

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_2 = \pi$$

$$\theta_1 = \pi - 2\theta_2. \tag{1.149}$$

1.23 Satélite em formato de haltere

(a) Vamos considerar, para simplificação dos cálculos, que toda a massa do satélite está concentrada no seu centro de massa, a uma distância r_0 do centro da Terra. Essa aproximação é razoável, uma vez que $L << r_0$. Igualando a força gravitacional à resultante centrípeta do movimento circular, temos que

$$2M\omega^2 r_0 = \frac{G(2M)M_T}{r_0^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0^3}}. \tag{1.150}$$

(b) Para calcular a tensão no cabo que une os satélites vamos considerar aproximações de primeira ordem do campo gravitacional em torno de r_0, para isso escreva a distância entre um ponto e a Terra como sendo $r = r_0 + x$, com $x << r_0$. Daí

$$g = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{GM_T}{(r_0 + x)^2}$$

$$g = \frac{GM_T}{r_0^2}\left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^{-2} \tag{1.151}$$

Usando a aproximação de Bernoulli

$$g \approx \frac{GM_T}{r_0^2}\left(1 - \frac{2x}{r_0}\right)$$

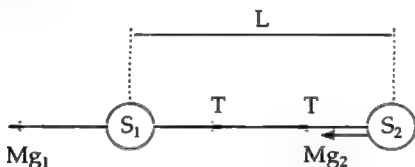
$$g \approx \frac{GM_T}{r_0^2} - \frac{2GM_T}{r_0^3}x. \tag{1.152}$$

No caso dos satélites S_1 e S_2, temos que $r_1 = r_0 - L/2$ e $r_2 = r_0 + L/2$, respectivamente, o que gera os valores de campos

gravitacionais locais

$$g_1 = \frac{GM_T}{r_0^2} + \frac{GM_T}{r_0^3} L$$

$$g_2 = \frac{GM_T}{r_0^2} - \frac{GM_T}{r_0^3} L. \qquad (1.153)$$

O diagrama de forças em cada um dos satélites é mostrado pela figura a seguir.

Podemos igualar a força resultante em cada um dos satélites com a resultante centrípeta de um movimento circular de velocidade angular ω, calculada no item anterior. Veja

$$Mg_2 + T = M\omega^2 \left(r_0 + \frac{L}{2}\right)$$

$$Mg_1 - T = M\omega^2 \left(r_0 - \frac{L}{2}\right). \qquad (1.154)$$

Subtraindo a primeira da segunda equação, podemos calcular o valor da tração T

$$M(g_2 - g_1) + 2T = M\omega^2 L$$

$$T = \frac{3GM_T M}{2r_0^3} L. \qquad (1.155)$$

(c) No referencial girante em que surgem as forças fictícias citadas, o satélite S_2 encontra-se em repouso. Segundo um observador nesse referencial, surge uma força centrífuga que equilibra as demais forças que atuam nesse satélite, que no referencial inercial correspondiam exatamente a resultante centrípeta F_{ctp} do sistema.

$$T + mg_2 = F_{cfg}$$

$$F_{ctp} = F_{ctg}. \tag{1.156}$$

Dessa forma concluímos, para o caso do corpo de massa m no satélite S_2, que

$$F_{cfg} = m\omega^2 r_2. \tag{1.157}$$

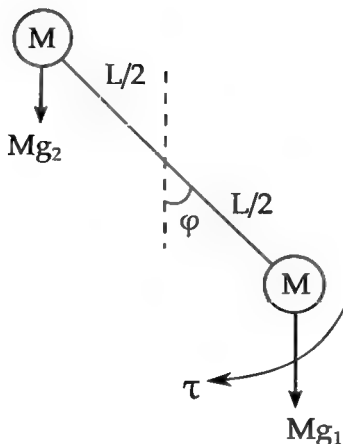
(d) A força efetiva sobre o corpo de massa m é dada por

$$F_{ef} = m\omega^2 r_2 - mg_2$$

$$F_{ef} = \frac{GM_T m}{r_0^3}\left(r_0 + \frac{L}{2}\right) - m\left(\frac{GM_T}{r_0^2} - \frac{GM_T}{r_0^3}L\right)$$

$$F_{ef} = \frac{3GM_T m}{2r_0^3}L. \tag{1.158}$$

Sendo, conforme demonstrado, proporcional ao comprimento do fio.

(e) É fácil verificar que $\varphi = 0$ é um ponto de equilíbrio estável, pois nessa situação não há quaisquer efeitos de torque. Para pequenos deslocamentos angulares em torno desse ponto, verificamos que surge um torque restaurador, uma vez que $g_1 > g_2$, como mostra a figura a seguir.

O ângulo $\varphi = \pi/2$ rad também é um ponto de equilíbrio do sistema, mas é instável.

(f) O resultado pedido pode ser obtido através de uma aproximação de pêndulo simples, considerando o valor de tração T do cabo para $\varphi = 0$. Defina uma gravidade efetiva g_{ef} sentida pelo satélite S_1 da seguinte forma

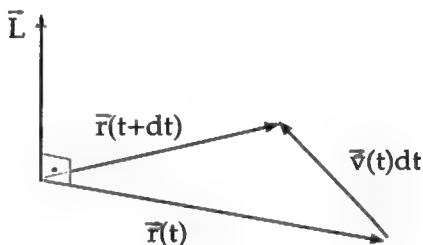
$$T = Mg_{ef} = \frac{3GM_TM}{2r_0^3}L$$

$$g_{ef} = \frac{3GM_T}{2r_0^3}L. \tag{1.159}$$

Daí basta tomar o resultado de um pêndulo simples de comprimento $l = L/2$ submetido a uma aceleração local g_{ef}

$$T_{osc} = 2\pi\sqrt{\frac{L/2}{g_{ef}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{3GM_T}}. \tag{1.160}$$

1.24 Potencial Efetivo

(a) Para mostrar que o movimento é contido em um plano, considere um intervalo de tempo infinitesimal $[t, t + dt]$. O plano de movimento nesse instante é determinado pelo par de vetores $\{\vec{r}(t), \vec{r}(t + dt)\}$ ou, de forma equivale, $\{\vec{r}(t), \vec{v}(t)\}$, uma vez que $\vec{r}(t + dt) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)dt$.

Esse plano pode ser determinado pelo seu vetor normal, obtido a partir do produto vetorial $\vec{n} = \vec{r} \times \vec{v}$, que é paralelo ao vetor momento angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m\vec{n}. \qquad (1.161)$$

Como forças centrais não realizam torque com respeito ao centro de forças, concluímos que o momento angular se conserva e, portanto, o movimento deve estar totalmente contido em um único plano definido pelo vetor normal $\vec{n}$.

(b) Podemos definir um sistema de coordenadas polar (r, θ) para localizar o corpo, para isso definimos localmente um par de direções: $\hat{r}$ denota a direção radial, que corresponde à direção que gera o máximo aumento da coordenada r e $\hat{\theta}$, que corresponde ao incremento da coordenada θ, mantendo o valor de r constante. A velocidade do corpo pode ser decomposta nesse sistema local de

coordenadas da seguinte forma

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + \frac{L}{mr}\hat{\theta}. \tag{1.162}$$

(c) A energia mecânica total pode ser escrita como

$$E = \frac{mv^2}{2} + V(r). \tag{1.163}$$

Como o sistema de coordenadas polares é ortogonal, isto é, $\hat{r} \cdot \hat{\theta}$, temos que

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2. \tag{1.164}$$

Daí

$$E = \frac{mv_r^2}{2} + \left(\frac{mv_\theta^2}{2} + V(r)\right) \tag{1.165}$$

Escrevendo o momento angular como $L = mrv_\theta$, verifica-se que

$$\frac{mv_\theta^2}{2} = \frac{L^2}{2mr^2}, \tag{1.166}$$

garantido-se que a energia pode ser escrita apenas em termos da coordenada r, segundo a expressão

$$E = \frac{mv_r^2}{2} + V_{ef}(r). \tag{1.167}$$

onde $V_{ef}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$ é um potencial radial efetivo.

Esse método é muito útil para reduzir um problema de duas coordenadas (r, θ) em um problema unidimensional de coordenada r com um potencial efetivo.

1.25 Perturbação de órbita

(a) Igualando a força gravitacional a força centrípeta, temos que

$$F_g = F_{cpt}$$

$$\frac{GMm}{R^2} = m\omega_\theta^2 R$$

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}. \tag{1.168}$$

O período do movimento T é obtido a partir da frequência angular do movimento circular através da fórmula

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_\theta} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}. \tag{1.169}$$

(b) Podemos estudar as oscilações radiais do planeta com o uso de um potencial efetivo $V_{ef}(r)$ dado pela equação

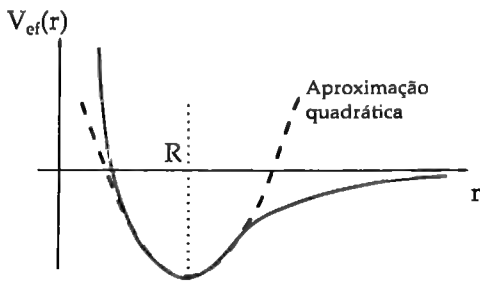
$$V_{ef}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \tag{1.170}$$

Podemos obter o valor de L utilizando a situação antes da pequena perturbação radial

$$L = I\omega = mR^2\sqrt{\frac{GM}{R^3}} = m\sqrt{GMR}. \tag{1.171}$$

Dessa maneira, podemos desenvolver a expressão de $V_{ef}(r)$ e encontrar a seguinte expressão

$$V_{ef}(r) = GMm\left(\frac{R}{2r^2} - \frac{1}{r}\right), \tag{1.172}$$

cujo gráfico é mostrado pela linha cheia da figura a seguir. Como pode-se verificar a posição $r = R$ é um mínimo de potencial, sendo portanto uma posição de equilíbrio, que corresponderia ao movimento circular. A perturbação radial fornece um incremento de energia que faz com que o planeta oscile entre um valor mínimo R_- e um valor máximo R_+.

Para estudar essa oscilação vamos considerar uma aproximação parabólica do potencial efetivo nas vizinhanças do ponto de equilíbrio. Para isso considere uma expansão de Taylor de segunda ordem de $V_{ef}(r)$ em torno de $r = R$:

$$V_{ef}(r) \approx V_{ef}(R) + V'_{ef}(R)(r - R) + \frac{1}{2}V''_{ef}(R)(r - R)^2 \quad (1.173)$$

em que

$$V_{ef}(R) = -\frac{GMm}{2R},$$

$$V'_{ef}(R) = GMm\left(-\frac{R}{r^3} + \frac{1}{r^2}\right) = 0,$$

e

$$V''_{ef}(R) = GMm\left(\frac{3R}{r^4} - \frac{2}{r^3}\right) = \frac{GMm}{R^3}. \tag{1.174}$$

Definindo $\Delta r = r - R$, chegamos a uma aproximação quadrática para $V_{ef}(r)$ na vizinhança de $r = R$

$$V_{ef}(R + \Delta r) \approx -\frac{GMm}{2R} + \frac{GMm}{2R^3}\Delta r^2. \tag{1.175}$$

O termo $V_{ef}(R) = -\frac{GMm}{2R}$ corresponde apenas a uma constante aditiva no potencial efetivo. Já a concavidade da aproximação parabólica do potencial efetivo pode ser identificada com a concavidade do potencial capaz de gerar um MHS com constante de oscilação k, que é dado por $V(x) = V_0 + \frac{kx^2}{2}$. Dessa forma, concluímos que o movimento radial pode ser aproximado por um MHS com constante de oscilação dada por

$$k = \frac{GMm}{R^3} = m\omega_r^2$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \omega_\theta. \tag{1.176}$$

Como $\omega_r = \omega_\theta$, temos que

$$T_r = T_\theta = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \tag{1.177}$$

Como $T_r/T_\theta = 1$, temos que sempre que uma oscilação radial é realizada o planeta completa uma volta completa ao redor da estrela, voltando ao mesmo ponto do início de um período. Assim, concluímos que a trajetória do movimento é fechada.

Obs: Isso já é um resultado esperado. Na verdade a trajetória do movimento corresponde a uma elipse de pequena excentricidade.

(c) O raciocínio desse item é análogo ao primeiro, é necessário apenas adicionar um termo associado à força gravitacional da massa M_p da poeira contida dentro de uma esfera de raio R

$$\frac{GMm}{R^2} + \frac{GM_pm}{R^2} = m\omega'^2_\theta R$$

$$\omega'_\theta = \sqrt{\frac{G(M+M_p)}{R^3}}, \tag{1.178}$$

em que $M_p = \mu\frac{4}{3}\pi R^3$. Dessa maneira, temos agora que

$$T_\theta = \frac{2\pi}{\omega'_\theta} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G(M+M_p)}}. \tag{1.179}$$

(d) A força gravitacional da poeira é dada, em função da distância r entre o planeta e a estrala, pela expressão

$$\vec{F}_p(r) = -\frac{Gm}{r^2}\left(\mu\frac{4}{3}\pi r^3\right)\hat{r} = -\frac{4}{3}\mu\pi Gm\vec{r}. \tag{1.180}$$

Para continuar a utilizar a abordagem do potencial efetivo, podemos deduzir o termo V_p, capaz de produzir $\vec{F}_p$ e modificar a energia potencial gravitacional, adicionando o termo associado à força gravitacional da nuvem de poeira

$$V_p = -\int F_p dr = \frac{2}{3}\mu\pi Gmr^2. \tag{1.181}$$

Dessa maneira, temos que o potencial efetivo pode ser escrito como

$$V_{ef}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{2}{3}\mu\pi Gmr^2 + \frac{L^2}{2mr^2}, \tag{1.182}$$

onde $L = I\omega = mR^2\sqrt{\frac{G(M+M_p)}{R^3}}$, de maneira análoga ao que

foi feito no item (b). Dessa maneira vamos utilizar novamente uma expansão quadrática do potencial em torno do ponto $r = R$, escrita pela equação 1.173. No caso da perturbação da órbita com a presença de poeira de densidade constante, temos que

$$V_{ef}(r) = V_{ef}(R) + \frac{2}{3}\mu\pi GmR^2 + \frac{L^2}{2mR^2} = V_0$$

$$V'_{ef}(r) = \frac{GMm}{R^2} + \frac{4}{3}\mu\pi GmR - \frac{L^2}{mR^3} = 0$$

$$V''_{ef}(R) = -\frac{2GMm}{R^3} + \frac{4}{3}\mu\pi Gm + \frac{3L^2}{mR^4} = \frac{Gm}{R^3}(M + 2M_p). \tag{1.183}$$

Da aproximação parabólica, podemos aproximar as pequenas oscilações radiais por um oscilador simples de constante

$$k' = V''_{ef}(R) = \frac{Gm}{R^3}(M + 2M_p) = m{\omega'}_r^2$$

$$\omega'_r = \sqrt{\frac{G}{R^3}(M + 2M_p)}. \tag{1.184}$$

Que resulta em um período de oscilação radial T'_r dado por

$$T'_r = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G(M + 2M_p)}}. \tag{1.185}$$

(e) A razão entre o período polar e radial é dada por

$$\frac{T'_\theta}{T'_r} = \sqrt{\frac{M + 2M_p}{M + M_p}}. \tag{1.186}$$

Como esse valor não precisa ser racional, temos que a trajetória descrita pelo planeta pode ser aberta, dependendo do valor de μ.

Calculemos qual o ângulo θ_{osc} descrito pelo vetor posição do planeta durante um período da sua oscilação radial T_r^*

$$\theta_{osc} = \omega_\theta' T_r^* = \sqrt{\frac{M + M_p}{M + 2M_p}}. \tag{1.187}$$

Considerando que a trajetória do planeta é uma elipse que precessiona, temos que nesse período a elipse girou de um ângulo dado pela diferença entre 2π e θ. Temos, portanto,

$$\Omega = \frac{2\pi - \theta_{osc}}{T_r}.$$

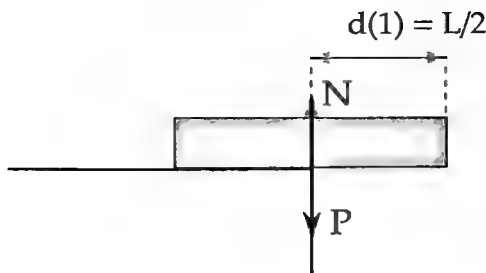
$$\Omega = \frac{2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{M+M_p}{M+2M_p}}\right)}{2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G(M+2M_p)}}}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{G}{R^3}(M + 2M_p)} - \sqrt{\frac{G}{R^3}(M + M_p)} = \omega_r' - \omega_\theta'. \tag{1.188}$$

O que deixa claro que a velocidade angular de precessão Ω da órbita está ligado à diferença entre as frequências angulares da revolução do corpo (ω_θ') e das oscilações radiais (ω_r').

1.26 Pilha de tijolos

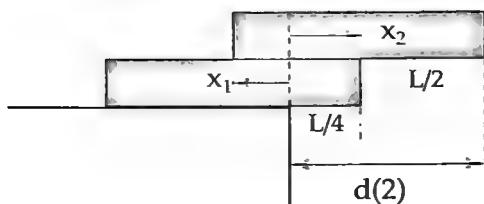
Buscaremos calcular a distância máxima $d(N)$ como uma função do número N de tijolos empilhados. Para isso, considere os casos iniciais.

Caso $N = 1$*:* Temos que o tijolo superior pode se deslocar no máximo até $d(1) = L/2$, situação em que o seu peso é aplicado no limite da superfície horizontal.

Caso $N = 2$*:* Sendo x_i a posição do centro de massa de cada tijolo da pilha com respeito ao fim da superfície horizontal, onde x_1 é o tijolo mais abaixo e x_2 é o tijolo mais acima. Para esse caso, temos que x_1 pode ser desconhecido, mas podemos afirmar que $x_2 = x_1 + L/2$, do caso $N = 1$.

Na situação crítica, o peso de toda a pilha fica aplicado sobre o fim da mesa horizontal. Logo

$$x_{cm} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 0$$

$$x_1 + x_2 = 2x_1 + \frac{L}{2} = 0$$

$$x_1 = -\frac{L}{4}. \tag{1.189}$$

A distância que a extremidade direita do primeiro tijolo fica à frente do fim da mesa é dada por

$$\Delta_1 = x_1 + \frac{L}{2} = \frac{L}{4}, \tag{1.190}$$

enquanto a distância que a extremidade do segundo tijolo fica adiante do primeiro é

$$\Delta_2 = d(1) = \frac{L}{2}. \tag{1.191}$$

A distância $d(2)$ pode ser, portanto, calculado somando Δ_1 e Δ_2

$$d(2) = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{3L}{4}. \tag{1.192}$$

Caso Geral: Sendo x_i a posição do centro de massa de cada tijolo da pilha com respeito ao fim da superfície horizontal, na ordem em que x_1 é o tijolo mais abaixo e x_N é o tijolo mais acima. Divida esse sistema no tijolo mais abaixo e a pilha de $N-1$ tijolos, logo acima. Essa pilha de tijolos pode ser trocada por um tijolo de massa $M_{N-1} = (N-1)m$ com o centro de massa localizado em X_{cm}^{N-1}, de tal forma que seu peso deve ser aplicado no fim do tijolo 1. Dessa maneira, temos que

$$X_{cm}^{N-1} = x_1 + \frac{L}{2}. \tag{1.193}$$

Acontece que na situação crítica, o peso da pilha dos N tijolos tem de estar aplicado sobre o fim da mesa. Daí

$$x_{cm} = \frac{1}{Nm}\left(mx_1 + (N-1)mX_{cm}^{N-1}\right) = 0$$

$$x_1 + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\frac{L}{2} = 0$$

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\frac{L}{2}. \tag{1.194}$$

A ponta do primeiro tijolo fica então uma distância à frente do fim da mesa de

$$\Delta_1 = x_1 + \frac{L}{2} = \frac{L}{2N}. \tag{1.195}$$

Agora, para estudar a pilha de $(N-1)$ tijolos sobre o primeiro basta repetir esse mesmo procedimento, analogamente obtemos a distância que a ponta do segundo tijolo está adiante da ponta do primeiro de

$$\Delta_2 = \frac{L}{2(N-1)}. \tag{1.196}$$

Os outros valores de avanço Δ_k de cada tijolo é obtido de maneira análoga. A quantidade $d(N)$ é calculada a partir da soma dos incrementos de cada um dos tijolos

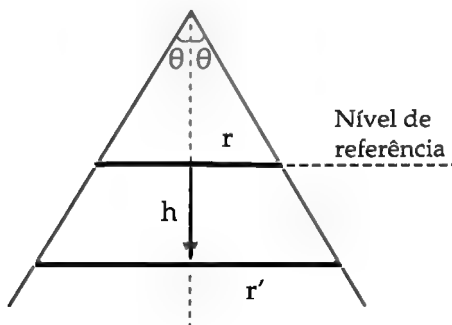
$$d(N) = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_N = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \cdots + 1\right)$$

$$d(N) = \frac{L}{2}\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right). \tag{1.197}$$

Como a série harmônica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, a distância $d(N)$ entre a extremidade do primeiro e do último bloco pode crescer arbitrariamente. Basta tomar termos suficientes da séria, isto é, ter um N suficientemente grande.

1.27 Cordão elástico

(a) A posição de equilíbrio de forças corresponde a um mínimo de energia potencial do sistema, que tem uma parcela correspondendo à energia gravitacional e uma parcela associada à energia elástica do cordão. Nesse caso é mais prático fazer uso da energia potencial total do sistema do que pelo uso direto de forças.

Tome como seu nível de referência a altura em que o cordão está relaxado e se encaixa exatamente na superfície do cone. A partir dessa posição, o cordão desce uma altura h e se estica adquirindo um novo comprimento, correspondente a uma circunferência de raio r'.

A energia potencial da situação inicial é nula, pois não há deformação do elástico, que está localizado no nível de referência de altura.

Na situação final, a energia gravitacional é dada por $U_g = -mgh$. Do vínculo geométrico do problema, temos que $r' = r + \text{tg}\theta$, que resulta no seguinte valor de energia potencial elástica

$$U_{el} = \frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{k}{2}(2\pi r' - 2\pi r)^2 = 2k\pi^2 h^2 \text{tg}^2\theta. \tag{1.198}$$

A condição de equilíbrio h^* é obtida através da minimização da quantidade $U = U_g + U_{el}$, veja

$$\frac{dU}{dh} = 4k\pi^2 h \text{tg}^2\theta - mg = 0$$

$$h^* = \frac{mg}{4k\pi^2 \text{tg}^2\theta}. \tag{1.199}$$

Que nos leva ao seguinte raio final do cordão

$$r' = r + \frac{mg}{4k\pi^2 \text{tg}\theta} \tag{1.200}$$

(b) A frequência de oscilação pode ser obtida através de uma aproximação parabólica da energia potencial do sistema $U = U_0 + \frac{Kh^2}{2}$ em torno do ponto de equilíbrio, onde K é a constante do MHS e pode ser obtido da segunda derivada de U com relação a h na posição de equilíbrio

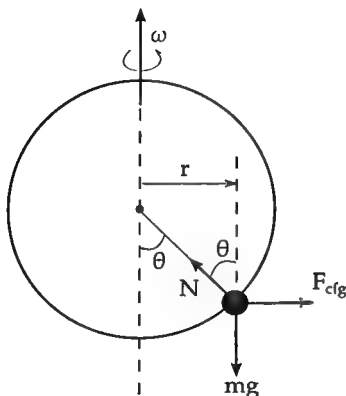
$$\frac{d^2U}{dh^2} = 4k\pi^2 \text{tg}^2\theta = K. \tag{1.201}$$

Dessa maneira, o período de oscilação é dado por

$$T = \sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k\pi^2 \text{tg}^2\theta}}. \tag{1.202}$$

1.28 Conta no aro girante

(a) Considere o referencial girante solidário ao anel, nesse referencial surge uma força centrífuga sobre a conta que aponta para fora dada por $F = m\omega^2 r$, onde r é a distância entre ela e o eixo de rotação do sistema.

O diagrama de forças sobre a conta está mostrado na figura a seguir, além da força centrífuga, atuam também sobre a conta a força peso e a força de contato N.

Do equilíbrio de forças nas direções horizontal e vertical, temos que

$$N\text{sen}\theta = m\omega^2 r$$

$$N\cos\theta = mg. \qquad (1.203)$$

Dividindo a primeira pela segunda equação, temos que

$$\text{tg}\theta = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{\omega^2 a\text{sen}\theta}{g}$$

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 a}. \qquad (1.204)$$

Podemos observar que, para que o ângulo de equilíbrio $\theta_0 = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)$ seja bem definido, é necessário uma velocidade angular ω suficientemente grande, maior que um valor crítico ω_c. Veja

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 a} < 1$$

$$\frac{g}{a} = \omega_c^2 < \omega^2. \tag{1.205}$$

(b) Vamos calcular a frequência de oscilação da conta através do método do mínimo de energia potencial. Para isso, temos que contabilizar a energia potencial gravitacional e a energia potencial centrífuga da conta.

A parcela correspondente a energia potencial gravitacional corresponde a elevação de altura $h = a(1 - \cos\theta)$ associada à elevação da conta. A parcela centrífuga é dada por

$$U_{cfg} = -\frac{m\omega^2 r^2}{2} = -\frac{m\omega^2}{2}a^2\text{sen}^2\theta. \tag{1.206}$$

A energia potencial total é dada, portanto, pela expressão

$$U(\theta) = mga(1 - \cos\theta) - \frac{m\omega^2}{2}a^2\text{sen}^2\theta. \tag{1.207}$$

Podemos validar a resposta do item anterior verificando se θ_0 corresponde a um mínimo de energia:

$$\frac{dU}{d\theta}(\theta_0) = mga\text{sen}\theta_0 - m\omega^2 a^2\text{sen}\cos\theta = 0. \tag{1.208}$$

que nos leva aos ângulos de equilíbrio $\theta_0 = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)$, além dos pontos de equilíbrio dados por $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$. Esses dois últimos pontos de equilíbrio são instáveis, de tal forma que pequenas oscilações ocorrem em torno do ponto de equilíbrio estável θ_0. O resultado encontrado aqui concorda com o do item anterior, conforme o esperado.

A constante de oscilação k da oscilação da conta pode ser obtida a

partir da segunda derivada da energia potencial $U(\theta)$ com respeito à posição angular

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mga\cos\theta - m\omega^2a^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mga\cos\theta - m\omega^2a^2(2\cos^2\theta - 1). \qquad (1.209)$$

Caculando essa quantidade no ponto $\theta = \theta_0$, temos que

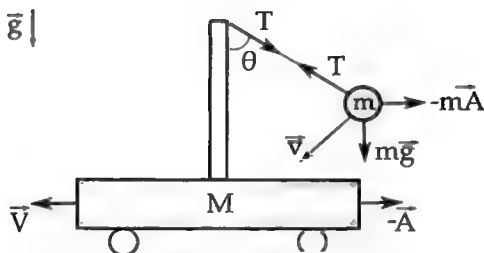
$$k_\theta = \frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_0) = m\omega^2a^2 - \frac{mg^2}{\omega^2}. \qquad (1.210)$$

Resultando na frequência de oscilação dada por

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_\theta}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(m\omega^2a^2 - \frac{mg^2}{\omega^2}\right)}{ma^2}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2a^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega^2 - \frac{\omega_c^4}{\omega^2}}. \qquad (1.211)$$

1.29 Pêndulo no carrinho

(a) Considere um instante em que a corda do pêndulo faz um ângulo de θ com respeito à vertical. Seja v a velocidade da massa m suspensa pela corda com respeito ao carrinho e V a velocidade do bloco de massa M. Observe o diagrama do sistema no referencial inercial do solo.

Vamos adotar nesse problema o referencial do bloco de massa M, esse sistema de referência não é inercial pelo fato de o bloco sofrer uma aceleração dada por A, relacionada com a tração da corda segundo a equação

$$T\text{sen}\theta = MA. \tag{1.212}$$

Nesse referencial sabemos que a massa m realiza um movimento circular de raio l. Escrevemos a resultante centrípeta do movimento como

$$\frac{mv^2}{l} = T - mg\cos\theta + mA\text{sen}\theta. \tag{1.213}$$

Combinando as equações 1.212 e 1.213, chegamos à expressão

$$T = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}\text{sen}^2\theta}\left(\frac{mv^2}{l} + mg\cos\theta\right). \tag{1.214}$$

Para encontrar a dependência de v com o ângulo θ, basta conservar a quantidade de movimento na direção horizontal do sistema

$$m(v\cos\theta - V) = MV \tag{1.215}$$

e a energia mecânica total do sistema

$$mgl\cos\theta = \frac{MV^2}{2} + \frac{m}{2}[(v\theta)^2 + (v\cos\theta - V)^2], \qquad (1.216)$$

segundo o referencial inercial do solo.

Da equação 1.215, sabemos que

$$V = \frac{v\cos\theta}{1+\frac{M}{m}}, \qquad (1.217)$$

que, combinado com a equação 1.216, nos leva ao resultado

$$v^2 = 2gl\cos\theta\frac{M+m}{M+m\text{sen}^2\theta}. \qquad (1.218)$$

De tal forma que chegamos a seguinte relação entre a tração na corda e o ângulo θ

$$T = mg\frac{3\cos\theta + \frac{m}{M}\left(3\cos\theta - \cos^3\theta\right)}{\left(1+\frac{m}{M}\text{sen}^2\theta\right)^2}. \qquad (1.219)$$

Pode-se mostrar, por inspeção direta que $\theta = 0$ minimiza o denominador e maximiza o numerador, de tal forma que T é maximizado nesse ângulo, atingindo o seu valor maximal

$$T_{max} = mg\left(3+\frac{2m}{M}\right). \qquad (1.220)$$

(b) Considere pequenas oscilações do sistema em torno da posição $\theta = 0$ da massa m. Seja E a energia total do sistema, dado pela equação

$$E = \frac{MV^2}{2} + \frac{m}{2}\left[(v\text{sen}\theta)^2 + (v\cos\theta - V)^2\right] + mgl(1-\cos\theta), \qquad (1.221)$$

que pode ser reescrita usando resultados passados como

$$E = \frac{mv^2}{2}\left(\frac{M + m\text{sen}^2\theta}{M+m}\right) + mgl(1-\cos\theta). \qquad (1.222)$$

Vamos tomar pequenas oscilações, de tal maneira que $M + m\text{sen}^2\theta \approx M$ e $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Escrevendo $v = l\theta'$, chegamos ao seguinte resultado

$$E = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}l^2\theta'^2 + mgl\frac{\theta^2}{2}. \qquad (1.223)$$

Como a energia mecânica é constante com o passar do tempo, temos que

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{mM}{m+M}l^2\theta'\theta'' + mgl\theta\theta' = 0$$

$$\theta'' + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{l}\theta = 0. \qquad (1.224)$$

Que é a equação diferencial do oscilador harmônico, cuja frequência natural é dada por

$$\omega = \sqrt{\left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{l}}. \qquad (1.225)$$

1.30 Oscilações Acopladas I

Numere os corpos com índices **1**, **2** e **3** no sentido horário. Considere que cada um dos corpos andou uma distância x_i, também em sentido horário. Podemos escrever as seguintes equações de movimento para descrever o movimento subsequente

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= K(x_2 - x_1) - K(x_1 - x_3) \\ m\ddot{x}_2 &= -K(x_2 - x_1) + K(x_3 - x_2) \\ m\ddot{x}_3 &= K(x_1 - x_3) - K(x_3 - x_2) \end{aligned} \tag{1.226}$$

Como estamos interessados em soluções oscilatórias, procuremos soluções da forma $x_1 = Ae^{i\omega t}$, $x_2 = Be^{i\omega t}$ e $x_3 = Ce^{i\omega t}$. Que nos levam ao seguinte sistema linear

$$\begin{aligned} (2K - m\omega^2)A - KB - KC = 0 \\ -KA + (2K - m\omega^2)B - KC = 0 \\ -KA - KB + (2K - m\omega^2)C = 0, \end{aligned} \tag{1.227}$$

que é homogêneo e, portanto, só pode admitir soluções $\{A, B, C\}$ não nulas se o determinante do sistema linear for nulo

$$\begin{vmatrix} (2K - m\omega^2) & -K & -K \\ -K & (2K - m\omega^2) & -K \\ -K & -K & (2K - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0. \tag{1.228}$$

Que leva à seguinte equação

$$(2K - m\omega^2)^3 - 2K^3 - 3K^2(m\omega^2 + 2K) = 0$$

$$\omega^2(\omega^2 - \frac{3K}{m})^2 = 0, \tag{1.229}$$

que nos leva aos valores de frequências naturais do sistema,

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}}. \tag{1.230}$$

A solução dupla $\omega_1 = 0$ reflete uma solução associada a uma posição inicial do sistema e a um possível movimento circular uniforme das massas pela cavidade. Já a solução $\omega = \omega_2$ é, de fato, oscilatória.

1.31 Oscilações acopladas II

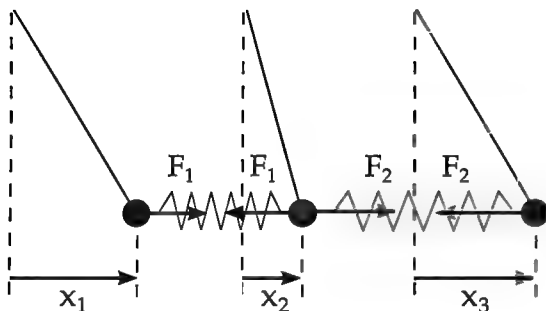
(a) Para um problema geral, o número F de graus de liberdade de um sistema é dado pela expressão

$$F = 3N - r, \tag{1.231}$$

onde $N = 3$ é o número de partículas do sistema e r é o número de condições de contorno. Em um sistema como o mostrado na figura temos que $r_{min} = 3$, correspondendo a condição de comprimento fixo de cada um dos fios. Logo, o maior número degraus de liberdade de um sistema, como o considerado na figura, é de $F = 9 - 3 = 6$.

Numerando as bolas e suas respectivas coordenadas com índices 1, 2 e 3, de fato, o sistema pode ser representado completamente pelas coordenadas $\{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3\}$. As coordenadas $\{z_1, z_2, z_3\}$ podem ser obtidas pelos valores dos comprimentos das três hastes e das 6 demais coordenadas.

(b) Nesse caso, adicionamos ao problema as condições de contorno $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, reduzindo o número de graus de liberdade a $F = 3$. Utilizaremos as coordenadas x_1, x_2 e x_3, considerando apenas pequenas vibrações.

Podemos escrever, para pequenas oscilações, as seguintes equações de movimento

$$
\begin{aligned}
mx_1'' &= -\frac{mg}{L}x_1 + K(x_2 - x_1) \\
mx_2'' &= -\frac{mg}{L}x_2 - K(x_2 - x_1) + K(x_3 - x_2) \\
mx_3'' &= -\frac{mg}{L}x_2 - K(x_3 - x_2).
\end{aligned}
\tag{1.232}
$$

Como estamos interessados em soluções oscilatórias, procuramos soluções da forma $x_1 = Ae^{i\omega t}$, $x_2 = Be^{i\omega t}$ e $x_3 = Ce^{i\omega t}$. utilizando esse conjunto de soluções harmônicas, chegamos ao seguinte sistema linear para as amplitudes A, B e C:

$$
\begin{aligned}
(\frac{mg}{L} + K - m\omega^2)A - KB = 0 \\
-KA + (\frac{mg}{L} + 2K - m\omega^2)B - KC = 0 \\
-KB + (\frac{mg}{L} + K - m\omega^2)C = 0,
\end{aligned}
\tag{1.233}
$$

que é um sistema linear homogêneo. Esse tipo de sistema admite soluções não nulas para A, B e C, isto é, admite um comportamento oscilatório, se a frequência angular de vibração ω for tal que o determinante do sistema homogêneo seja nulo

$$\begin{vmatrix} (\frac{mg}{L} + K - m\omega^2) & -K & 0 \\ -K & (\frac{mg}{L} + 2K - m\omega^2) & -K \\ 0 & -K & (\frac{mg}{L} + K - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0. \tag{1.234}$$

Esse determinante pode ser desenvolvido e fatorado da seguinte maneira

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{L}\right)\left(-\omega^2 + \frac{g}{L} + \frac{K}{m}\right)\left(-\omega^2 + \frac{g}{L} + \frac{3K}{m}\right) = 0, \tag{1.235}$$

que nos leva a três diferentes valores de frequências naturais do sistema, conforme o esperado

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{g}{L}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{K}{m}} \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{3K}{m}}. \end{aligned} \tag{1.236}$$

Resta-nos descrever os modos normais de oscilação associados a cada uma dessas frequências naturais.

A frequência ω_1 é associada ao modo de oscilação $x_1 = x_2 = x_3$. em que as três massas oscilam com a frequência do pêndulo simples. A segunda também pode ser identificada de maneira simples, tomando $x_2 = 0$ e $x_1 = -x_3$.

A visualização do terceiro modo de oscilação é um pouco mais difícil, nesse caso vamos ilustrar como os modos normais podem ser extraídos do conjunto das equações de dinâmica do sistema. Para isso, substitua $\omega = \omega_3$ no conjunto de equações 1.233. obtendo o

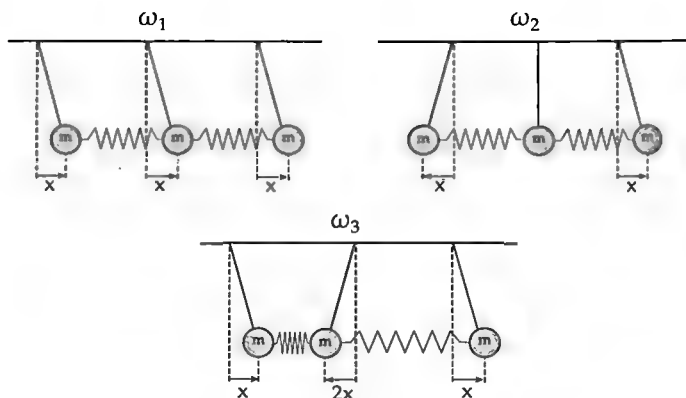
novo sistema

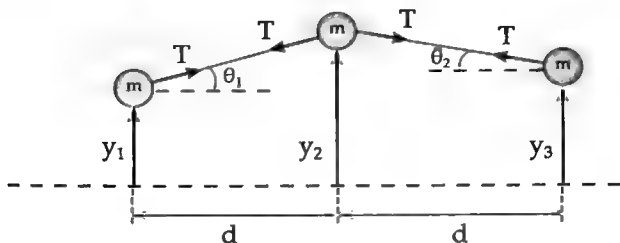
$$-2KA - KB = 0$$

$$-KA - KB - KC = 0 \tag{1.237}$$

$$-KB - 2KC = 0.$$

Como o sistema homogêneo é possível e indeterminado, ele admite infinitas soluções, que podem ser descritas pela forma $\{A, B, C\} = \{a, -2a, a\}$, com $a \in \mathbb{R}$, isto é, respeitando a relação $2x_1 = 2x_3 = -x_2$. Esse procedimento pode ser usado para verificar os dois outros modos, que foram obtidos através de verificação direta.

Observe os diagramas que ilustram os três modos de vibração do sistema.

(c) Analogamente ao item anterior, podemos afirmar que o sistema dispõe de 3 graus de liberdade e, portanto, de três modos normais

de vibração. Considerando pequenos deslocamentos y_1, y_2 e y_3, chegamos ao seguinte diagrama de forças.

Podemos escrever as seguintes equações para descrever o movimento das massas

$$\begin{aligned} my_1'' &= -\frac{mg}{L}x_1 + T\text{sen}\theta_1 \\ my_2'' &= -\frac{mg}{L}x_2 - T\text{sen}\theta_1 - T\text{sen}\theta_2 \\ my_3'' &= -\frac{mg}{L}x_2 + T\text{sen}\theta_2. \end{aligned} \tag{1.238}$$

No caso de pequenas oscilações, valem as aproximações $\text{sen}\theta \approx \text{tg}\theta \approx \theta$. Utilizando tal aproximação para pequenos deslocamentos, temos que

$$\text{sen}\theta_1 \approx \frac{y_2 - y_1}{d}$$

$$\text{sen}\theta_2 \approx \frac{y_2 - y_3}{d}. \tag{1.239}$$

As equações da dinâmica do sistema podem ser reescritas como

$$my_1'' = -\left(\frac{mg}{L} + \frac{T}{d}\right) y_1 + \frac{T}{d} y_2$$

$$my_2'' = \frac{T}{d}y_1 - \left(\frac{mg}{L} + \frac{2T}{d}\right)y_2 + \frac{T}{d}y_3 \tag{1.240}$$

$$my_3'' = \frac{T}{d}y_2 - \left(\frac{mg}{L} + \frac{T}{d}\right)y_3.$$

Utilizando soluções oscilatórias, isto é, fazendo $y_1 = Ae^{i\omega t}$, $y_2 = Be^{i\omega t}$ e $y_3 = Ce^{i\omega t}$, chegamos ao seguinte sistema linear

$$\left(\frac{mg}{L} + \frac{T}{d} - m\omega^2\right)A - \frac{T}{d}B = 0$$

$$-\frac{T}{d}A + \left(\frac{mg}{L} + \frac{2T}{d} - m\omega^2\right)B - \frac{T}{d}C = 0 \tag{1.241}$$

$$-\frac{T}{d}B + \left(\frac{mg}{L} + \frac{T}{d} - m\omega^2\right)C = 0.$$

Observe que esse conjunto de equações são análogas às do item anterior, sendo necessária apenas a substituição de K por T/d. As frequências desse sistema são, portanto, dadas por

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

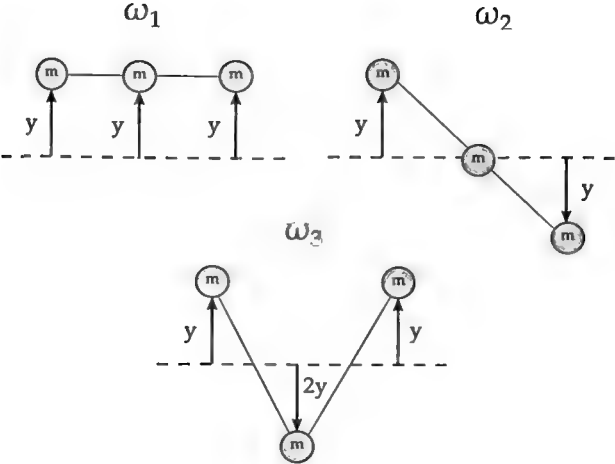
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{T}{md}} \tag{1.242}$$

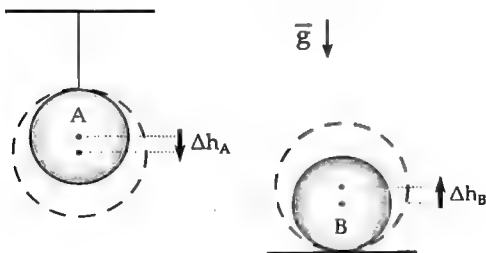
$$\omega_3 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{3T}{md}}.$$

Cada uma dessas frequências está associada a um modo de oscilação, que são completamente análogos aos modos de oscilação do item anterior, devido ao fato de que ambas as associações compartilham da mesma dinâmica. Esses modos são ilustrados pela figura a seguir.

ω1
ω2
ω3
m
y
2y

2

Termodinâmica

2.1 Aquecimento de duas esferas

Podemos calcular uma diferença de temperatura relacionando-a à diferença de energia potencial gravitacional, devido a uma eventual dilatação do raio da esfera de uma distância de $\Delta h = R\alpha\Delta T$. No primeiro caso, a energia do trabalho $mg\Delta h$ da força peso realiza trabalho positivo, adicionando energia ao sistema, enquanto no segundo caso, retira trabalho do sistema, retirando energia do mesmo. Veja a figura:

Assim,

$$Q + mgR\alpha(T_A - T_0) = C(T_A - T_0) \tag{2.1}$$

$$Q = C(T_B - T_0) + mgR\alpha(T_B - T_0). \tag{2.2}$$

Subtraindo as equações 2.1 e 2.2, podemos isolar a diferença de temperatura

$$T_A - T_B = \frac{2mg\alpha R}{C}\left(\frac{T_A + T_B}{2} - T_0\right) \tag{2.3}$$

Somando a equação 2.1 e 2.2 e dividindo o resultado por 2 em seguida, segue que

$$Q = C\left(\frac{T_A + T_B}{2} - T_0\right) - \frac{1}{2}mgR\alpha(T_A - T_B). \tag{2.4}$$

Definindo as grandezas $\overline{\Delta T} = \left(\frac{T_A+T_B}{2} - T_0\right)$ e $\delta T = T_A - T_B$. O sistema de equações pode ser reescrito como

$$\delta T = \frac{2mg\alpha R}{C}\overline{\Delta T}$$

$$Q = C\overline{\Delta T} - \frac{1}{2}mgR\alpha\,\delta T. \tag{2.5}$$

Isolando δT do sistema de equações lineares encontrado, temos que

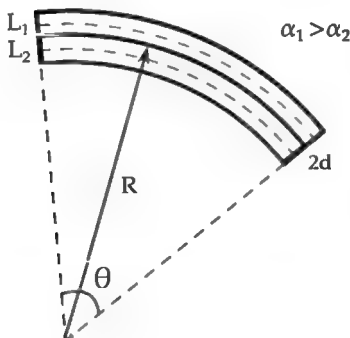
$$\delta T = \frac{Q}{\frac{C^2}{2mgR\alpha} - \frac{1}{2}mgR\alpha} \tag{2.6}$$

$$\delta T = \frac{2mgR\alpha Q}{C^2 - (mgR\alpha)^2}. \tag{2.7}$$

Desprezando termos de segunda ordem em α, chegamos à seguinte resposta

$$\delta T \approx \frac{2mgR\alpha Q}{C^2}. \tag{2.8}$$

2.2 Tira bimetálica

Chame de L_1 e L_2 os comprimentos de cada uma das tiras metálicas medidas no seus respectivos centros. Para $\alpha_1 > \alpha_2$, o aquecimento da tira bimetálica causa um encurvamento como o ilustrado na figura a seguir.

Seja θ o ângulo do arco de circunferência descrito pela lâmina, calculado em radianos como

$$\theta = \frac{L_1 + L_2}{2R}. \tag{2.9}$$

Os comprimentos L_1 e L_2 podem ser escritos como arcos de circunferência de raios $(R + d/2)$ e $(R - d/2)$, respectivamente. Dessa forma, escrevemos:

$$L_1 = L_0(1 + \alpha_1 \Delta T) = (R + d/2)\theta$$

$$L_2 = L_0(1 + \alpha_2 \Delta T) = (R - d/2)\theta. \tag{2.10}$$

Dessa forma, isolando o raio de curvatura R da lâmina, encontra-se o resultado

$$R = \frac{d(1+\overline{\alpha}\Delta T)}{\Delta\alpha\ \Delta T}, \tag{2.11}$$

em que $\overline{\alpha} = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ e $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$.

A concavidade da tira é dado, portanto, pela equação

$$k = \frac{1}{R}$$

$$k = \frac{\Delta\alpha\ \Delta T}{d(1+\overline{\alpha}\Delta T)} \approx \frac{\Delta\alpha\ \Delta T}{d}. \tag{2.12}$$

2.3 Termômetro de mercúrio

Seja $\Delta T = T - T_0$. O volume final de mercúrio é dado por

$$V_{Hg} = V_0(1+\beta\Delta T), \tag{2.13}$$

por outro lado, o volume do bulbo na temperatura T também se dilata, sendo dado por

$$V_b = V_0(1+3\alpha\Delta T). \tag{2.14}$$

Concluímos que um volume $\Delta V = V_{Hg} - V_b = V_0(\beta - 3\alpha)\Delta T$ sairá do bulbo e formará uma coluna de mercúrio. Deve-se lembrar agora que o diâmetro do termômetro também se dilatará com o aumento da temperatura. Finalmente, podemos calcular a altura h da coluna de mercúrio pela expressão

$$h = \frac{V_0(\beta-3\alpha)\Delta T}{S_0(1+2\alpha\Delta T)}.$$

Em primeira ordem em ΔT, o que é o comumente usado em problemas de dilatação térmica, ficamos com a seguinte aproximação

$$h \approx \frac{V_0(\beta-3\alpha)\Delta T}{S_0}(1-2\alpha\Delta T)$$

$$h \approx \frac{V_0(\beta - 3\alpha)\Delta T}{S_0}, \tag{2.15}$$

isto é, o efeito da dilatação da área transversal da coluna de líquido é apenas de segunda ordem.

2.4 Esfera na água aquecida

Seja C a capacidade térmica de um sistema genérico aquecido que perde calor para a vizinhança. O calor dQ perdido está associado a uma queda de temperatura dT e deve ser proporcional a um intervalo de tempo infinitesimal dt, supondo um fluxo de energia instantâneo dado por Φ. Matematicamente, temos que

$$dQ = CdT = \Phi dt. \tag{2.16}$$

Isolando o intervalo de tempo necessário para que haja um decréscimo infinitesimal dT na temperatura, obtemos

$$dt = \frac{CdT}{\Phi}. \tag{2.17}$$

A capacidade térmica do primeiro recipiente é $C_1 = mc_w$ e a do segundo é $C_1 = m(c+c_w)w$. Como a densidade da bola de metal é muito superior a da água, podemos supor que o aumento de volume do sistema quando a esfera é adicionada é desprezível, não havendo, portanto, mudança na relação entre Φ e a temperatura instantânea de ambos sistemas. Como o segundo recipiente esfria k vezes mais lentamente que o primeiro, essa proporção deve ser satisfeita para intervalos infinitesimais associados a uma mesma variação de temperatura dT. Ou seja,

$$dt_2 = kdt_1. \tag{2.18}$$

Portanto,

$$\frac{C_2 dT}{\Phi} = k\frac{C_1 dT}{\Phi}$$

$$C_2 = kC_1. \tag{2.19}$$

Substituindo os valores de C_1 e C_2, temos que

$$m(c + c_w) = kmc_w$$

$$c = (k-1)c_w \tag{2.20}$$

2.5 Condutividade térmica de barras

Para resolver de maneira mais intuitiva, fazer uma analogia entre a corrente elétrica e o fluxo de calor (ou corrente de calor), é bastante útil. O fluxo de calor sai dos pontos mais quentes para os pontos mais frios, da mesma forma como a corrente elétrica sai dos pontos de alto potencial elétricos para os de menor potencial. Dessa maneira, diferença de potencial, ou força eletromotriz do circuito, pode ser associada com a diferença de temperaturas.

A lei de Fourier, nessa analogia, corresponde à 1^a lei de Ohm

$$I = \frac{V}{R} \longleftrightarrow \Phi = \frac{kA\Delta T}{l} = \frac{\Delta T}{R_T}. \tag{2.21}$$

Definimos então uma resistência térmica de cada barra, dada por $R_T = \frac{l}{kA}$ (a semelhança dessa expressão com a 2^a lei de Ohm não é coincidência). Essa resistência térmica pode ser associada em série ou em paralelo da mesma forma de um resistor.

Do enunciado, igualando as quantidades de calor transferidas em cada uma das duas situações, temos que

$$Q = \Phi_1 20 = \Phi_2 60. \tag{2.22}$$

Dessa última equação, juntamente com a equação 2.21, podemos afirmar que $R_1 = R_2/3$.

Dessa maneira, concluímos que a resistência em série das barras será

$$R_s = R_1 + R_2 = 4R_1, \tag{2.23}$$

isto é, 4 vezes maior que R_1, o que implica dizer que o tempo T_s será 4 vezes maior que $T_1 = 20$ min, logo

$$T_s = 4T_1 = 80 \text{ min}. \tag{2.24}$$

Por outro lado, a resistência em paralelo R_p das barras resulta em

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{4}, \tag{2.25}$$

ou seja, 4 vezes menor que R_2. Segue, portanto, que o tempo T_p necessário para derreter o gelo com as barras em paralelo é

$$T_p = \frac{T_2}{4} = 15 \text{ min}. \tag{2.26}$$

2.6 Chapas de aço no Sol

Considere o diagrama de trocas de calor a seguir. A temperatura da superfície superior é dada por T_1, a da superfície inferior por T_2 e a temperatura ambiente é denotada por T_0. Considere ainda que a placa considerada tenha espessura t e que a área considerada para as trocas de calor seja A. A potência recebida pela irradiação solar P_s depende apenas da área exposta A e de uma constante de irradiação solar I, ou seja

$$P_s = IA. \tag{2.27}$$

Modelaremos a troca de calor com o ambiente como troca de calor por irradiação, que depende da quarta potência da temperatura. Cada uma das superfícies irradia conforme sua temperatura e absorve irradiação do ambiente. Sendo P_1 a potência perdida pela superfície superior e P_2 a potência perdida pela superfície inferior, temos que

$$P_1 = \sigma A(T_1^4 - T_0^4)$$

$$P_2 = \sigma A(T_2^4 - T_0^4). \tag{2.28}$$

A potência P_c trocada por condução entre a superfície inferior com o ambiente obedece a lei de Fourier

$$P_c = \frac{kA(T_1 - T_2)}{t}. \tag{2.29}$$

No regime estacionário, há um equilíbrio entre a potência absorvida e a perdida pela superfície superior, garantindo que

$$IA = \sigma A(T_1^4 - T_0^4) + \frac{kA(T_1 - T_2)}{t}. \tag{2.30}$$

Pode-se estabelecer um raciocínio análogo para superfície inferior da chapa, chegando à expressão

$$\frac{kA(T_1 - T_2)}{t} = \sigma A(T_2^4 - T_0^4) \tag{2.31}$$

Combinando as equações 2.30 e 2.31, chegamos ao seguinte resultado

$$T_1^4 + T_2^4 = \frac{I}{\sigma A} + 2T_0^4. \tag{2.32}$$

Observe que o lado esquerdo é uma constante para a placa fina e grossa, não dependendo da sua espessura. Temos portanto que

$$T_1^4 + T_2^4 = 360^4 + 340^4. \tag{2.33}$$

Considerando a equação 2.31 para as placas fina e grossa, e, em seguida, dividindo as equações uma pela outra, podemos cancelar as constante físicas do problema. Esse raciocínio nos leva ao resultado

$$\frac{\frac{360-340}{t}}{\frac{T_1-T_2}{2t}} = \frac{340^4 - 300^4}{T_2^4 - 300^4}$$

$$\frac{40}{T_1 - T_2} = \frac{340^4 - 300^4}{T_2^4 - 300^4} \tag{2.34}$$

Resolvendo o sistema composto pelas equações 2.33 e 2.34, chegamos a seguinte estimativa para T_1 e T_2 (métodos numéricos podem ser usados para obter uma resposta aproximada)

$$T_1 = 365K$$

$$T_2 = 330K \tag{2.35}$$

2.7 Congelamento de um lago

Seja A a área do lago e h sua profundidade média, considerada como um valor constante nessa estimativa. Pode-se escrever a lei de Fourier em um determinado instante, em que a espessura da parede de gelo é x, da seguinte forma

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{kAT}{x}. \tag{2.36}$$

O calor dQ perdido, por sua vez, causa um incremento dx na espessura da parede de gelo e pode ser escrito como

$$dQ = dm\ L = \rho\ dV L = \rho ALdx. \tag{2.37}$$

Dessa forma, chegamos ao seguinte equação

$$\rho AL\frac{dx}{dt} = \frac{kAT}{x}, \tag{2.38}$$

que pode ser integrada ao longo do processo, levando ao resultado desejado

$$\frac{\rho L}{kT}\int_0^h xdx = \int^{\Delta t} tdt$$

$$\Delta t = \frac{\rho L}{kT}\frac{h^2}{2}. \tag{2.39}$$

2.8 Sistema com pistão ligado a uma mola

(a) O volume V ocupado pelo gás pode ser escrito como $V = Sx$, onde x é a posição horizontal do êmbolo que comprime a mola. Aplicando a condição de equilíbrio de forças no êmbolo, podemos observar que a força elástica é igual a força que o gás exerce sobre o êmbolo, essa força pode ser calculada dividindo a força elástica da mola pela área do embolo

$$P = \frac{F}{S} = \frac{Kx}{S}. \tag{2.40}$$

Utilizando a equação de Clayperon, chegamos a seguinte equação

$$Kx^2 = RT, \tag{2.41}$$

que pode ser diferenciada, levando à expressão

$$Kxdx = \frac{RdT}{2}. \tag{2.42}$$

Escrevendo a primeira lei da termodinâmica na sua forma diferencial, temos que

$$dQ = dU + pdV = c_v dT + Kxdx. \quad (2.43)$$

Como o gás é monoatômico, temos que $c_v = \frac{3}{2}R$, de tal forma que

$$dQ = 2RdT. \quad (2.44)$$

Dessa maneira, a capacidade térmica c do gás é dada por

$$c = \frac{dQ}{dT} = 2R. \quad (2.45)$$

(b) Como a temperatura do gás se mantém constante, temos que

$$PV = \text{cte}. \quad (2.46)$$

Na posição de equilíbrio, podemos considerar $x = x_0$, de tal forma que $V_0 = Sx_0$. A pressão P_0 do gás nessa condição é determinada pela expressão

$$P_0 S = Kx_0 \rightarrow P_0 = \frac{Kx_0}{S}. \quad (2.47)$$

Dessa forma, a equação 2.46 nos leva a

$$P = \frac{kx_0^2}{Sx}. \quad (2.48)$$

Movendo o pistão para uma posição fora do equilíbrio $x = x_0 + \Delta x$, com $\Delta x << x_0$, temos que a força resultante restauradora é dada por

$$F_R = kx - PS = kx - \frac{kx_0^2}{x} = k(x_0 + \Delta x) - \frac{kx_0^2}{x_0 + \Delta x}. \quad (2.49)$$

Utilizando a aproximação de Bernoulli $(1 + z)^n \approx 1 + nz$, se $z << 1$, temos que

$$\frac{1}{x_0 + \Delta x} = \frac{1}{x_0\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)} = \frac{1}{x_0}\left(1 - \frac{\Delta x}{x_0}\right). \tag{2.50}$$

De tal forma que F_R reduz-se a $F_R = 2K\Delta x$. O que mostra que a oscilação é aproximadamente descrita por um oscilador harmônico de período dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2K}}. \tag{2.51}$$

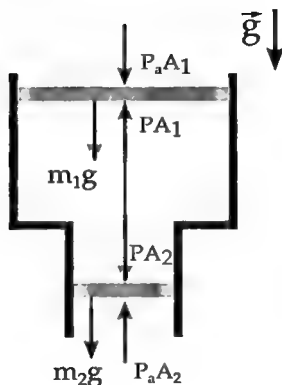
(c) Para adiabáticas, temos que $PV^\gamma =$ cte. Podemos fazer, neste item, um formalismo análogo ao item anterior, com leves adaptações. No caso de transformações adiabáticas, a pressão do gás é dada por

$$P = \frac{Kx_0^{\gamma+1}}{S}\left(\frac{1}{x}\right)^\gamma \approx \frac{Kx_0}{S}\left(1 - \gamma\frac{\Delta x}{x_0}\right). \tag{2.52}$$

De tal forma que a força F_R pode ser escrita como $F_R = K(1 + \gamma)\Delta x$. Mostrando que a oscilação é aproximadamente harmônica e levando-nos ao seguinte resultado para o período de oscilação

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{(1+\gamma)K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{5K}}. \tag{2.53}$$

2.9 Estrangulamento de tubo (OIbF)

(a) Seja a pressão atmosférica na vizinhança do sistema e a pressão do gás no espaço compreendido pelo par de êmbolos. As forças externas que atuam nos pistões estão representadas no diagrama a seguir.

A soma das massas dos pistões é dada por $m_1 + m_2 = m$. A condição de equilíbrio de forças resulta, portanto, na seguinte equação

$$mg + P_a A_1 + P A_2 = P A_1 + P_a A_2. \tag{2.54}$$

Isolando a pressão P do gás, obtemos

$$P = P_a + \frac{mg}{A_1 - A_2}. \tag{2.55}$$

(b) Considere que o comprimento da corda que liga os dois pistões é dado por L, sendo um comprimento h contido na parte do tubo com secção transversal de área A_1 e comprimento $L - h$ na parte do tubo com secção de área A_2. Da geometria do problema, temos que o volume ocupado pelo gás é dado por

$$V = hA_1 + (L - h)A_2 = A_2 L + h(A_1 - A_2). \tag{2.56}$$

Observe que a pressão calculada no item (a) independe da tem-

peratura em que o gás se encontra. Dessa forma, podemos supor que a pressão se mantém constante se estivermos lidando com transformações gasosas reversíveis. Pelo fato de a transformação ser isobárica, tem-se que

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T} \rightarrow \frac{T}{T_0} = \frac{V}{V_0}. \tag{2.57}$$

Subtraindo uma unidade dos dois lados da equação 2.57, fazemos aparecer as variações de volume $\Delta V = \Delta h(A_1 - A_2)$ e de temperatura ΔT. Dessa forma,

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta h(A_1 - A_2)}{V_0}$$

$$\Delta h = \frac{V_0}{A_1 - A_2} \frac{\Delta T}{T_0}. \tag{2.58}$$

2.10 Transformação gasosa irreversível

Vamos dividir o problema em duas partes: uma expansão isotérmica reversível à temperatura T_0 e uma compressão adiabática irreversível. Seja h a altura inicial do êmbolo e A a secção transversal de área do cilindro.

Processo 1: Expansão isotérmica reversível ($0 \rightarrow 1$)

$$p_0 V_0 = p_1 V_1$$

$$p_0 h A = p_1 (h + H) A$$

$$p_1 = p_0 \frac{h}{h + H}. \tag{2.59}$$

Processo 2: Compressão adiabática ($1 \to 2$) irreversível

Nesse problema, a pressão externa e a pressão interna do gás não são iguais, pois a transformação é irreversível. O trabalho associado à transformação gasosa é dado por

$$W = p_{ext}\Delta V$$

$$W = p_0(h_f - h - H)A. \tag{2.60}$$

Como o hélio é um gás monoatômico, temos que

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR(T_f - T_0). \tag{2.61}$$

Da primeira lei da termodinâmica segue que

$$Q = \Delta U + W$$

$$0 = \frac{3}{2}nR(T_f - T_0) + p_0(h_f - h - H)A$$

$$p_0(h + H - h_f) = \frac{3}{2}nR(T_f - T_0) \tag{2.62}$$

Considerando a situação inicial e final do gás, segue da equação de Clayperon que

$$p_0 A h = nRT_0 \tag{2.63}$$

$$p_0 A h_f = nRT_f \tag{2.64}$$

Combinando as equações 2.62, 2.63 e 2.64, obtemos

$$h_f = h + \frac{2}{5}H. \tag{2.65}$$

Observação: Um erro comum na resolução desse problema consiste

em usar a equação da transformação adiabática reversível para o gás. Procedendo dessa maneira, teríamos que,

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

$$V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma}$$

$$Ah_f = A(h+H)\left(\frac{h}{h+H}\right)^{1/\gamma} \tag{2.66}$$

Para um gás monoatômico $\gamma = 3/2$, segue que

$$h_f = (h+H)\left(\frac{h}{h+H}\right)^{2/3} = h\left(1+\frac{H}{h}\right)^{2/5}. \tag{2.67}$$

É interessante notar que é possível verificar que a equação (2.67) reduz-se ao resultado 2.65, no caso de transformações gasosas infinitesimais ($H \to 0$). Segue da aproximação de Bernoulli que

$$h_f \approx h\left(1+\frac{2H}{5h}\right) = h + \frac{2}{5}H. \tag{2.68}$$

Esse fato é esperado, uma vez que uma transformação reversível pode ser entendida como uma composição de várias transformações infinitesimais de maneira lenta e suave.

2.11 Bomba de de gás

(a) A primeira compressão da bomba é uma compressão isotérmica simples, em que um volume inicial $V + V_0$ de gás é comprimido até o volume final V. Dessa maneira temos que

$$P_{atm}(V_0 + V) = P_1 V$$

$$P_1 = P_{atm}\left(1 + \frac{V_0}{V}\right). \tag{2.69}$$

Ao retornar a posição inicial do pistão, o ar atmosférico entra pela válvula A, enquanto o gás comprimido no reservatório V está confinado pela válvula B. As próximas compressões são divididas em duas fases: i) a elevação da pressão do gás na câmara da bomba até a mesma pressão do reservatório V e ii) a injeção de gás no reservatório V.

Seja P_{i-1} a pressão do reservatório V após $i-1$ compressões. Vamos estudar agora as duas fases da i-ésima compressão separadamente.

i) Elevação da pressão da câmara de ar até a pressão P_{i-1}:

   Essa fase da i-ésima compressão é uma compressão isotérmica simples do gás contido na câmara de ar. O volume inicial do gás é dado por V_0 e o volume final pode ser chamado de V'. Essa fase da compressão acontece até que a pressão do gás na câmara atinja um valor P_{i-1}. Dessa maneira, temos que

$$P_{atm}V_0 = P_{i-1}V'$$

$$V' = \frac{P_{atm}}{P_{i-1}}V_0. \tag{2.70}$$

ii) Injeção de gás no reservatório V através da válvula B:

   A segunda fase da i-ésima compressão é uma compressão isotérmica do gás contido na câmara de ar e no reservatório. O volume inicial dessa porção de gás é $V + V'$ e o volume final é V. A pressão do gás ao final da compressão é P_i. Dessa maneira, temos que

$$P_{i-1}(V + V') = P_iV$$

$$P_i = P_{i-1}\left(1 + \frac{V'}{V}\right) = P_{i-1}\left(1 + \frac{V_0}{V}\frac{P_{atm}}{P_{i-1}}\right)$$

$$P_i = P_{i-1} + \frac{V_0}{V}P_{atm} \tag{2.71}$$

A equação 2.71 demonstra que a sequência de pressões P_i é uma progressão aritmética (PA). Note que essa equação de recorrência também é válida para a primeira compressão. Dessa maneira a pressão P_N é obtida através o termo geral da PA

$$P_N = P_0 + N\frac{V_0}{V}P_{atm} = P_{atm}\left(1 + N\frac{V_0}{V}\right). \tag{2.72}$$

(b) A solução desse item tem o seu raciocínio análogo ao anterior, sendo necessárias pequenas correções pelo fato de as transformações gasosas passarem a ser adiabáticas.

A primeira compressão da bomba é uma compressão adiabática simples, em que um volume inicial $V + V_0$ de gás é comprimido até o volume final V. Dessa maneira temos que

$$P_{atm}(V_0 + V)^\gamma = P_1 V^\gamma$$

$$P_1 = P_{atm}\left(1 + \frac{V_0}{V}\right)^\gamma. \tag{2.73}$$

A divisão das compressões subsequentes se dá da mesma maneira que o item anterior. Dessa maneira, vamos estudar agora as duas fases da i-ésima compressão.

i) Elevação da pressão da câmara de ar até a pressão P_{i-1}:

Essa fase da i-ésima compressão é uma compressão adiabática simples do gás contido na câmara de ar. O volume inicial do

gás é dado por V_0 e o volume final pode ser chamado de V'. Essa fase da compressão acontece até que a pressão do gás na câmara atinja um valor P_{i-1}. Dessa maneira, temos que

$$P_{atm}V_0^\gamma = P_{i-1}V'^\gamma$$

$$V' = \left(\frac{P_{atm}}{P_{i-1}}\right)^{1/\gamma} V_0. \qquad (2.74)$$

ii) Injeção de gás no reservatório V através da válvula B:

A segunda fase da i-ésima compressão é uma compressão adiabática do gás contido na câmara de ar e no reservatório. O volume inicial dessa porção de gás é $V + V'$ e o volume final é V. A pressão do gás ao final da compressão é P_i. Dessa maneira, temos que

$$P_{i-1}(V + V')^\gamma = P_i V^\gamma$$

$$P_i = P_{i-1}\left(1 + \frac{V'}{V}\right)^\gamma$$

$$\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right)^\gamma = 1 + \frac{V'}{V} = 1 + \frac{V_0}{V}\left(\frac{P_{atm}}{P_{i-1}}\right)^\gamma$$

$$P_i^{1/\gamma} = P_{i-1}^{1/\gamma} + \frac{V_0}{V}P_{atm}^{1/\gamma} \qquad (2.75)$$

A equação 2.75 demonstra que, no caso de transformações adiabáticas, a sequência de pressões $P_i^{1/\gamma}$ é uma PA. Nesse item, a equação de recorrência também é válida para a primeira compressão adiabática. Temos, portanto que

$$P_N^{1/\gamma} = P_{atm}^{1/\gamma} + N\frac{V_0}{V}P_{atm}^{1/\gamma} = P_{atm}^{1/\gamma}\left(1 + N\frac{V_0}{V}\right)$$

$$P_N = P_{atm}\left(1 + N\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}. \tag{2.76}$$

2.12 Volante oco com gases

(a) Podemos considerar o referencial girante solidário à cavidade oca. Nesse referencial não-inercial, existe sobre cada uma das massas uma força centrífuga que as faz penetrar em direção ao volume ocupado pelo gás. Essa compressão faz com que as pressões de cada um dos três recipientes variem. Os separadores de gases são todos idênticos e livres de atrito com as paredes da cavidade, de tal forma que diferenças de pressão entre dois recipientes resultam necessariamente em um deslocamento dos separadores. Como na situação final há equilíbrio mecânico e termodinâmico, os separadores devem estar em repouso, indicando que não há diferença de pressão entre os três gases. Portanto, na situação final de equilíbrio dos gases temos que

$$P_1' = P_2' = P_3' = P'. \tag{2.77}$$

Observe que isso também vale para a situação de repouso, logo

$$P_1 = P_2 = P_3 = P. \tag{2.78}$$

(b) Considere a equação de Clapeyron para o gás i na situação inicial, onde pode assumir os valores 1, 2 ou 3.

Como os gases mantêm suas temperaturas constantes e iguais a T, além de suas pressões serem idênticas entre si, conclui-se que deve existir uma proporcionalidade direta entre V_i e n_i. Segue, portanto, que

$$\frac{n_1}{V_1} = \frac{n_2}{V_2} = \frac{n_3}{V_3} = \frac{P}{RT}. \tag{2.79}$$

Uma vez que conhecemos a razão entre os volumes iniciais, segue que

$$n_1 = \frac{n_2}{2} = \frac{n_3}{3}. \tag{2.80}$$

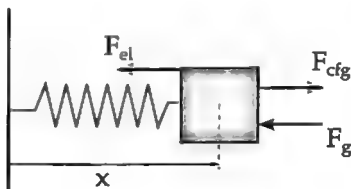
Considere agora as equações de Clapeyron para os gases nas suas situações finais

$$P'V_i' = n_i RT. \tag{2.81}$$

Analogamente, observamos que a proporção entre volumes e quantidade de matéria em cada um dos recipientes se mantém. Como não há troca de gás entre os recipientes, concluímos que

$$\frac{V_1'}{n_1} = \frac{V_2'}{n_2} = \frac{V_3'}{n_3} = \frac{RT}{P'}$$

$$V_1' = \frac{V_2'}{2} = \frac{V_3'}{3}. \tag{2.82}$$

(c) Considere o diagrama de forças de uma das massas M, mostrado na figura a seguir.

A força centrífuga é representada por $F_{cfg} = M\omega^2 x$, onde x é a distância do centro da roda até o centro de massa do pistão.

$F_g = P_g r^2$ é a força que o gás exerce na parede do pistão em uma de suas faces quadradas, devido a sua pressão P_g. Por fim, $F_{el} = k\left[x - \left(R + \frac{r}{2}\right)\right]$ é a força elástica associada a distensão da mola. Do equilíbrio de forças temos que

$$F_{el} + F_g = F_{cfg}$$

$$k\left[x - \left(R + \frac{r}{2}\right)\right] + P_g r^2 = M\omega^2 x. \qquad (2.83)$$

Para a situação sem nenhum gás nem rotação ($\omega = 0$), temos que $x = R + r/2$ e todas as forças consideradas são nulas.Nessa situação, temos que as pressões dos três gases são dadas por P e as molas sofrem uma compressão de r ($x = R - r/2$). Assim

$$-kr + Pr^2 = 0$$

$$P = \frac{k}{r}. \qquad (2.84)$$

Para a situação final dos gases, temos

$$k\left[x - \left(R + \frac{r}{2}\right)\right] + P' r^2 = M\omega^2 x. \qquad (2.85)$$

Precisamos agora determinar o valor de P'. Para isso, observe que a deformação de cada mola é igual às outras, pois as três equações de equilíbrio são idênticas. Sendo y o deslocamento das massas entre as duas posições de equilíbrio, temos que $x = y + (R - r/2)$. O volume total disponível para os gases 1, 2 e 3 quando a roda gira é dado por

$$V_1' + V_2' + V_3' = V_1 + V_2 + V_3 - 3r^2 y. \qquad (2.86)$$

Vamos estudar o sistema composto pelos gases 1,2 e 3. Considerando os volumes totais, obtidos pela soma dos volumes ocupados pelas três porções de gás, reescrevemos a equação anterior da seguinte forma

$$V' = V - 3r^2y. \tag{2.87}$$

Da geometria do problema, temos que

$$V = r[\pi(R+r)^2 - piR^2] = \pi r(2Rr + r^2). \tag{2.88}$$

Como a transformação realizada pelo gás é isotérmica, temos que

$$PV = P'V'$$

$$k\pi(2Rr + r^2) = P'[\pi r(2Rr + r^2) - 3r^2y]$$

$$P' = \frac{k/r}{1 - \frac{3y}{\pi(2R+r)}}. \tag{2.89}$$

Reescrevendo agora a equação de equilíbrio de forças 2.85 em termos de y, verificamos que y deve satisfazer uma equação quadrática. Veja

$$k(y-r) + \frac{kr}{1 - \frac{3y}{\pi(2R+r)}} = M\omega^2\left[y + \left(R - \frac{r}{2}\right)\right]$$

$$k(y-r)\left[1 - \frac{3y}{\pi(2R+r)}\right] + kr = M\omega^2\left[y + \left(R - \frac{r}{2}\right)\right]\left[1 - \frac{3y}{\pi(2R+r)}\right]$$

$$y^2\frac{3(M\omega^2-k)}{\pi(2R+r)}+y\left[\frac{3kr}{\pi(2R+r)}+M\omega^2\left(\frac{3(R-r/2)}{\pi(2R+r)}-1\right)\right]$$
$$-M\omega^2\left(R-\frac{r}{2}\right)=0. \quad (2.90)$$

A distância de penetração deve ser solução da equação de segundo grau encontrada e satisfazer a inequação $0 < y < r$ para ter sentido físico.

(d) A equação 2.86, pode ser reescrita em termos das variações de volume dos gases

$$\Delta V_1+\Delta V_2+\Delta V_3=-3r^2y. \quad (2.91)$$

Observe agora que V_1, V_2 e V_3 devem guardar a mesma proporção que V_1', V_2' e V_3'. Para que isso aconteça, tal proporção também deve valer para as variações de volume. Assim, temos que

$$\Delta V_1=\frac{\Delta V_2}{2}=\frac{\Delta V_3}{3}. \quad (2.92)$$

Dessa, as variações de volume de cada um dos gases são dadas pelas seguintes equações

$$\Delta V_1=-\frac{r^2y}{2}$$

$$\Delta V_2=-r^2y \quad (2.93)$$

$$\Delta V_3=-\frac{3r^2y}{2}.$$

Levando em conta que cada porção de gás é penetrada de uma

distância de y pelo pistão, a variação de volume associada ao deslocamento angular dos separadores é

$$\Delta V_1 = -r^2 y + \Delta V_{1,\theta}$$

$$\Delta V_{1,\theta} = \frac{r^2 y}{2}. \tag{2.94}$$

Analogamente, temos

$$\Delta V_{2,\theta} = 0 \tag{2.95}$$

$$\Delta V_{3,\theta} = -\frac{r^2 y}{2}. \tag{2.96}$$

Logo, tomando a origem de ângulos adequada, podemos afirmar que não haverá deslocamentos angulares nos separadores $1-2$ e $2-3$. O separador $1-2$, por outro lado, será deslocado de uma distância associada ao volume $r^2 y/2$.

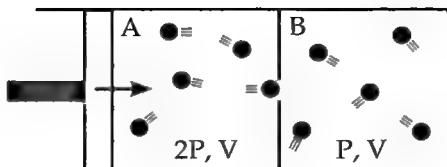
O volume determinado por um deslocamento de θ é obtido através de uma proporção com o volume total inicial dos gases

$$\frac{r^2 y}{2} = V\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta r^2}{2}(2R + r) \tag{2.97}$$

Levando ao resultado final

$$\theta = \frac{y}{2R + r}. \tag{2.98}$$

2.13 Gases Ideais

Observe a figura a seguir com um diagrama esquemático do problema, que ilustra a situação inicial do sistema.

Seja o volume final do gás contido no recipiente A e T' a temperatura final do gás nos recipientes A e B. O trabalho realizado sobre o sistema é dado por

$$W = p_{gas}\Delta V = -2P(V - V'). \tag{2.99}$$

O número de mols de gás total nesse sistema é dado por

$$n = n_A + n_B = \frac{2pV}{RT} + \frac{pV}{RT} = \frac{3pV}{RT}, \tag{2.100}$$

que nos leva a seguinte variação de energia interna total do sistema

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR(T' - T) = \frac{3}{2}\frac{3pV}{RT}R(T' - T)$$

$$\Delta U = \frac{9}{2}pV\left(\frac{T'}{T} - 1\right). \tag{2.101}$$

Vamos aplicar agora a primeira lei da termodinâmica no sistema. Note que, considerando o sistema de estudo como sendo composto pelos cilindros A e B, não há troca de calor com a vizinhança. Segue, portanto, que

$$Q = W + \Delta U = 0$$

$$2p(V - V') = \frac{9}{2}pV\left(\frac{T'}{T} - 1\right)$$

$$4\left(1-\frac{V'}{V}\right)=9\left(\frac{T'}{T}-1\right) \tag{2.102}$$

Como não há vazamento de gás para fora do sistema, temos que a quantidade de matéria se conserva com o tempo. Calculando a quantidade de matéria no instante final do processo considerado, obtemos

$$n'=n'_A+n'_B=\frac{2pV'}{RT'}+\frac{2pV}{RT'}=\frac{2P}{RT'}(V+V'). \tag{2.103}$$

Mas a conservação de quantidade de matéria nos garante que $n=n'$, daí

$$\frac{3PV}{RT}=\frac{2P}{RT'}(V+V')$$

$$\frac{3T'}{T}=2\left(1+\frac{V'}{V}\right). \tag{2.104}$$

De 2.102 e 2.104, encontramos as respostas desejadas

$$T'=\frac{17}{15}T \quad \text{e} \quad V'=\frac{7}{10}V. \tag{2.105}$$

2.14 Relação de Mayer e aquecimento de gás

(a) Sejam $c_{v,m}=N_Ac_v$ e $c_{p,m}=N_Ac_p$, em que N_A representa o número de Avogadro, os calores específicos molares a volume e pressão constantes, respectivamente. Escrevendo a primeira lei da termodinâmica, em sua forma diferencial, para uma transformação gasosa genérica, temos que

$$dQ=dU+pdV. \tag{2.106}$$

Utilizando as definições de calores específicos, temos que

$$c_{v,m} = \frac{1}{n}\frac{dQ_v}{dT} = \frac{1}{n}dU/dT$$

$$c_{p,m} = \frac{1}{n}\frac{dQ_p}{dT} = \frac{1}{n}\left(c_v + p\frac{dV}{dT}\right), \tag{2.107}$$

onde dQ_v e dQ_p representam quantidades de calor trocadas sob condições de volume e pressão constantes, respectivamente, e n é o número de mols de gás envolvidos na transformação gasosa considerada. Desses resultados, escrevemos a seguinte equação

$$nc_{p,m}dT = nc_{v,m}dT + pdV \tag{2.108}$$

O termo pdV pode ser obtido a partir da equação de Clayperon em sua forma diferencial para pressão constante

$$pdV = nRdT. \tag{2.109}$$

Substituindo o resultado da equação 2.109 na equação 2.108, chegamos em

$$c_{p,m} = c_{v,m} + R, \tag{2.110}$$

que, ao ser dividida por N_A, nos leva ao resultado desejado

$$c_p = c_v + k, \tag{2.111}$$

onde a constante $k = R/N_A$ é conhecida como constante de Boltzmann.

(b) Para essa questão, usaremos a relação de Mayer para os calores específicos molares $c_{p,m} = c_{v,m} + R$, de onde pode-se deduzir da definição $\gamma = c_p/c_v$ que

$$c_{v,m} = \frac{R}{\gamma - 1}. \tag{2.112}$$

Como não há aumento de volume do gás, consideraremos que a transformação gasosa considerada é isovolumétrica e não realiza, portanto, trabalho na sua vizinhança. Dessa forma

$$E = nc_{v,m}\Delta T. \tag{2.113}$$

O número de moles de gás contido nesse volume V é determinado diretamente da equação de Clapeyron

$$n = \frac{p_0 V}{RT_0}, \tag{2.114}$$

o que resulta na seguinte variação de temperatura

$$\Delta T = \frac{E}{\frac{p_0 V}{RT_0} \frac{R}{\gamma - 1}}$$

$$\Delta T = \frac{T_0}{p_0}(\gamma - 1)\frac{E}{V}. \tag{2.115}$$

A variação de pressão do gás segue da aplicação da equação de Clapeyron

$$\Delta p V = nR\Delta T$$

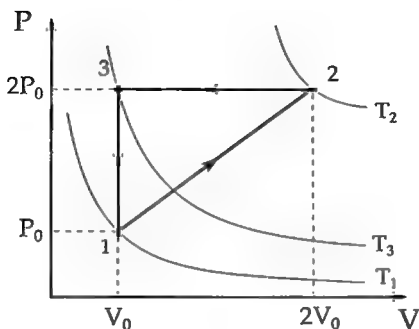
$$\Delta p = \frac{nR}{V}\Delta T$$

$$\Delta p = (\gamma - 1)\frac{E}{V}. \tag{2.116}$$

2.15 Ciclo Térmico

Traçando diferentes curvas isotérmicas podemos observar que o estado do ciclo térmico com maior temperatura é o representado pelo ponto 2, e o do de menor temperatura é o representado pelo ponto 1. Segue, portanto, que $4T_1 = T_2$. Observe agora que a transição $3 \to 1$ é isovolumétrica e a transformação $2 \to 3$ é representada por uma equação do tipo $\frac{V}{T} =$ cte, o que caracteriza uma transformação isobárica. Por último, a transformação $T = bV^2$ pode ser reescrita utilizando a equação de Clapeyron

$$p = bTV, \tag{2.117}$$

sendo, desta maneira, representada por uma reta no plano $p - V$. Refazendo o diagrama que descreve as transformações gasosas, utilizando coordenadas p e V, obtém-se o seguinte gráfico.

Seja p_1 e V_1 a pressão e volume do gás no estado 1. Como $4T_1 = T_2$ e $p = bRV$ descreve a transformação $1 \to 2$, temos que $p_2 = 2p_1$ e $V_2 = 2V_1$. Por fim, temos que $p_3 = 2p_1$ e $V_3 = V_1$.

As temperaturas de cada um desses estados são dadas por

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{R}, \quad T_2 = \frac{4p_1 V_1}{R} \quad e \quad T_3 = \frac{2p_1 V_1}{R}. \tag{2.118}$$

A quantidade líquida de calor Q' pode ser encontrada da seguinte maneira

$$Q' = c_p\left(\frac{2p_1V_1}{R} - \frac{4p_1V_1}{R}\right) + c_v\left(\frac{p_1V_1}{R} - \frac{2p_1V_1}{R}\right)$$

$$Q' = -\frac{13}{2}p_1V_1 \tag{2.119}$$

Vamos considerar agora a transição $1 \to 2$ para calcular a quantidade de calor Q através da primeira lei da termodinâmica. A variação da energia interna é dado por $\Delta U = c_v \Delta T$ e o trabalho é dado pela área sob a curva.

$$Q = \Delta U + W = \frac{3}{2}R\left(\frac{4p_1V_1}{R} - \frac{p_1V_1}{R}\right) + \frac{3}{2}p_1V_1$$

$$Q = 6p_1V_1. \tag{2.120}$$

Dessa maneira, temos que

$$Q' = -\frac{13}{12}Q. \tag{2.121}$$

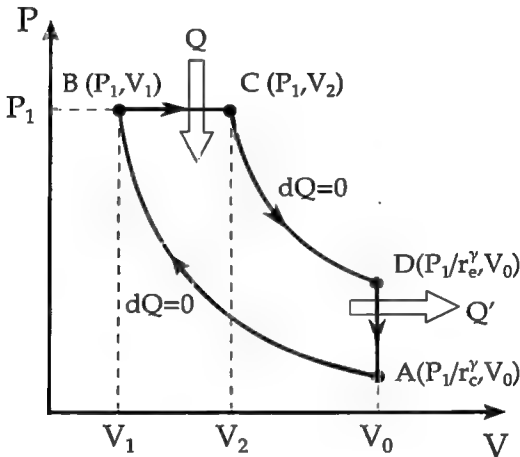
2.16 Rendimento do ciclo Diesel

Considere que o estado B seja definido pelas coordenadas $B(p_1, V_1)$. Escrevendo a equação da compressão adiabática $A \to B$. temos que

$$p_A V_0^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma}$$

$$p_A = \frac{p_1}{r_c^\gamma}. \qquad (2.122)$$

Dessa maneira, o estado A é dado por $A(\frac{p_1}{r_c^\gamma}, V_0)$.

O estado C é definido pelo par de coordenadas $C(p_1, V_2)$. De forma análoga ao que foi feito anteriormente, podemos calcular o estado D como sendo $D(\frac{p_1}{r_e^\gamma}, V_0)$.

Supondo, sem perda de generalidade, daqui em diante que $n = 1$ mol, temos que a temperatura de cada estado é dada por $T = \frac{pV}{R}$. O calor injetado no gás que realiza o ciclo térmico é dado por

$$Q = c_p(T_c - T_B) = \frac{c_p p_1 (V_2 - V_1)}{R}. \qquad (2.123)$$

O calor rejeitado na transição $D \to A$ é dado, em módulo, por

$$Q' = c_v(T_D - T_A) = \frac{c_v p_1 V_0 \left(\frac{1}{r_e^\gamma} - \frac{1}{r_c^\gamma}\right)}{R}. \qquad (2.124)$$

O rendimento do ciclo térmico é dado por

$$\eta = \frac{W}{Q} = 1 - \frac{Q'}{Q} = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\left(\frac{1}{r_e^\gamma} - \frac{1}{r_c^\gamma}\right)}{\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_c}\right)}. \tag{2.125}$$

2.17 Rendimento do ciclo Joule

Considere que o estado B seja definido pelas coordenadas $B(rp_0, V_1)$ e o estado C dado pelas coordenadas $C(rp_0, V_2)$.

Calcularemos agora o estado A a partir do estado B e da equação que descreve a compressão adiabática $A \to B$

$$p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma$$

$$p_0 V_A^\gamma = rp_0 V_1^\gamma$$

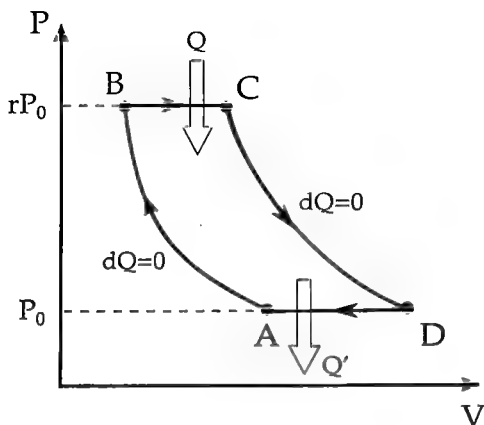
$$V_A = r^{1/\gamma} V_1. \tag{2.126}$$

Dessa maneira, o estado A é dado por $A(\frac{p_0}{r^\gamma}, r^{1/\gamma} V_1)$. Analogamente, temos que o estado B é descrito como $B(p_0, r^{1/\gamma} V_2)$.

Supondo daqui em diante que $n = 1$ mol, pois o rendimento de um ciclo independe da quantidade de gás utilizada, temos que a temperatura de cada estado é dada por $T = \frac{pV}{R}$. O calor injetado no gás que realiza o ciclo térmico é dado por

$$Q = c_p(T_c - T_B) = \frac{c_p r p_0 (V_2 - V_1)}{R}. \tag{2.127}$$

O calor rejeitado na transição $D \to A$ é dado, em módulo, por

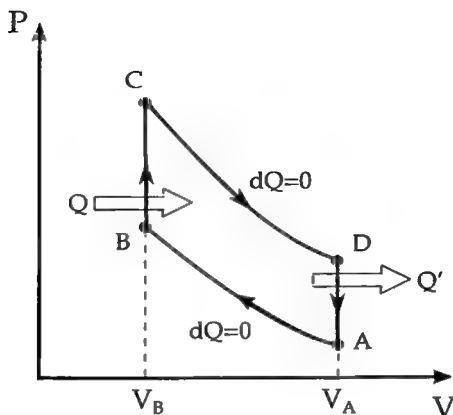
$$Q' = c_p(T_D - T_A) = \frac{c_p p_0 (V_2 - V_1)}{R} r^{1/\gamma}. \tag{2.128}$$

O rendimento do ciclo térmico é dado por

$$\eta = \frac{W}{Q} = 1 - \frac{Q'}{Q} = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{1-1/\gamma} . \tag{2.129}$$

2.18 Rendimento do motor a gasolina

Podemos criar um diagrama usando as coordenadas de pressão e volume para representar o ciclo de Otto, obtendo a figura a seguir.

Seja o estado A dado pelas coordenadas $A(p_1, V_A)$ e o estado D dado pelas coordenadas $D(p_2, V_A)$.

Calcularemos agora o estado B a partir do estado A e da equação que descreve a compressão adiabática $A \to B$

$$p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma$$

$$p_1 V_A^{\gamma} = p_B V_B^{\gamma}$$

$$p_B = p_1 r^{\gamma}. \tag{2.130}$$

Dessa maneira, concluímos que o estado B é descrito pelo estado $B(p_1 r^{\gamma}, V_B)$. Analogamente, temos que o estado C é descrito como $C(p_2 r^{\gamma}, V_B)$.

Supondo daqui em diante que $n = 1$ mol, temos que a temperatura de cada estado é dada por $T = \frac{pV}{R}$. O calor injetado no gás que realiza o ciclo térmico é dado por

$$Q = c_v(T_C - T_B) = c_v \frac{p_2 - p_1}{R} V_B r^{\gamma}. \tag{2.131}$$

O calor rejeitado na transição $D \to A$ é dado, em módulo, por

$$Q' = c_v(T_D - T_A) = c_v \frac{p_2 - p_1}{R} V_A. \tag{2.132}$$

O rendimento do ciclo térmico é dado por

$$\eta = \frac{W}{Q} = 1 - \frac{Q'}{Q} = 1 - r^{1-\gamma} = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1}. \tag{2.133}$$

2.19 Ciclo térmico de 3 estados

(a) Suponha, sem perda de generalidade, que a quantidade de gás envolvida no ciclo é dada por $n = 1$ mol. Nomeie os três estados que determinam o triângulo como $A(V_0, 2P_0)$, $B(2V_0, P_0)$ e $C(V_0, P_0)$. Analise agora as transições $A \to B$, $B \to C$ e $C \to A$ separadamente.

Transição $B \to C$:

Essa transição é constituída de uma compressão isobárica, pois a pressão se mantém constante enquanto acontece uma redução do volume ocupado pelo gás. O trabalho da transição é, portanto,

$$W_{BC} = P\Delta V = -P_0 V_0. \tag{2.134}$$

Pode-se calcular, utilizando a equação de Clayperon, a temperatura do estado C, obtendo $T_C = \frac{P_0 V_0}{2}$. Dessa forma, pode-se calcular a variação de energia interna do gás nessa transição

$$\Delta U_{BC} = \frac{3R}{2}\Delta T = -\frac{3P_0 V_0}{2} \tag{2.135}$$

Logo,

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = -\frac{5P_0 V_0}{2}. \tag{2.136}$$

Transição $C \to A$:

Do gráfico, observa-se que o volume do gás permanece constante, de tal forma que estamos lidando aqui com uma transformação gasosa isocórica, que necessariamente não realiza trabalho, isto é,

$$W_{CA} = 0. \tag{2.137}$$

Portanto, segue da primeira lei da termodinâmica que

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} = \frac{3R}{2}\Delta T = \frac{3P_0V_0}{2}. \tag{2.138}$$

Transição $A \to B$:

Temos da equação de Clayperon que $T_A = T_B = \frac{2P_0V_0}{R}$, logo $\Delta U_{AB} = 0$. Da primeira lei da termodinâmica, temos

$$Q_{AB} = W_{AB} = \frac{3P_0V_0}{2}. \tag{2.139}$$

No entanto, não se deve usar o calor Q_{AB} para o cálculo de rendimento, visto que entre os estados A e B há tanto absorção como liberação de calor. Sejam p e v a pressão e o volume ocupado pelo gás, respectivamente, durante a transformação $A \to B$. Da primeira lei da termodinâmica, temos que

$$dQ = dU + pdv = \frac{3}{2}RdT + pdv. \tag{2.140}$$

Da equação de Clayperon, em sua forma diferencial, temos que

$$pdv + dpv = RdT. \tag{2.141}$$

A transição $A \to B$ pode ser descrita ainda pela seguinte equação de primeiro grau, que fornece o valor de pressão dado o volume ocupado,

$$p = 3P_0 - \frac{P_0}{V_0}v. \tag{2.142}$$

Substituindo as equações 2.141 e 2.142 na equaçãp 2.140, deduz-se que

$$dQ = \frac{3}{2}dpv + \frac{5}{2}pdv = \left(\frac{15P_0}{2} - \frac{4P_0}{V_0}v\right)dv. \tag{2.143}$$

Dessa forma, o gás só recebe calor enquanto $dQ > 0$, o que acontece apenas se $v < 15V_0/8$. Logo, a quantidade total de calor absorvida nessa transição é dada por

$$Q_{CA}^1 = \int_V^{15V_0/8} \left(\frac{15P_0}{2} - \frac{4P_0}{V_0}v\right)dv = \frac{49}{32}P_0V_0. \tag{2.144}$$

Cálculo do rendimento: Finalmente, concluímos que o trabalho líquido realizado durante o ciclo térmico e a soma das quantidades de calor absorvidas no ciclo são, respectivamente,

$$W = \frac{P_0V_0}{2}$$

$$Q_1 = \frac{49}{32}P_0V_0 + \frac{3}{2}P_0V_0 = \frac{97}{32}P_0V_0. \tag{2.145}$$

Logo, o rendimento do ciclo é dado por

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{16}{97} = 16,5\%. \tag{2.146}$$

(b) É fácil notar que a temperatura mínima do ciclo térmico acontece no ponto C, sendo dada por

$$T_{min} = T_c = \frac{P_0V_0}{R}. \tag{2.147}$$

O ponto de temperatura máxima ocorre entre os ponto A e B. A temperatura do gás depende diretamente do produto da sua pressão e volume seguindo a equação $T = pv/R$, que pode ser colocada apenas em função do volume ocupado pelo gás utilizando a equação 2.142. Dessa maneira, escrevemos

$$T = \frac{3P_0}{R}v - \frac{P_0 v^2}{RV_0}, \tag{2.148}$$

o que representa uma parábola com um ponto de máximo dado por

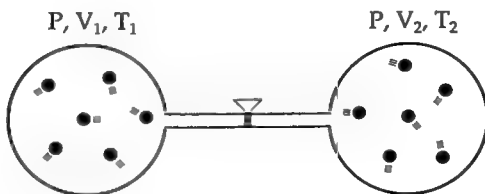
$$T_{max} = \frac{9P_0V_0}{4R}. \tag{2.149}$$

Finalmente,o rendimento de uma máquina de Carnot que opera entre as duas temperaturas limites é dado por

$$\eta_C = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = \frac{5}{9} = 56\%. \tag{2.150}$$

Note que, conforme o esperado, $\eta < \eta_C$.

2.20 Variação de entropia de um gás

(a) Considere a situação inicial do sistema estudado, mostrada na figura a seguir.

Na situação final, considerando que as paredes dos recipientes sejam rígidas, temos que a porção de gás no recipiente à esquerda seja caracterizada pelo estado (P', V_1, T'), e a porção de gás no recipiente à direita seja caracterizada pelo estado (P', V_2, T').

Como o sistema estudado não troca calor nem trabalho com a vizinhança, a energia interna se conserva

$$U_i = U_f$$

$$\frac{3}{2}n_1RT_1 + \frac{3}{2}n_2RT_2 = \frac{3}{2}(n_1 + n_2)RT'$$

$$T' = \frac{n_1T_1 + n_2T_2}{n_1 + n_2}. \tag{2.151}$$

Utilizando a equação de Clapeyron, podemos calcular a quantidade de matéria de cada uma das duas porções gasosas

$$n_1 = \frac{PV_1}{RT_1} \quad \text{e} \quad n_2 = \frac{PV_2}{RT_2}. \tag{2.152}$$

O que nos leva a temperatura final do sistema

$$T' = \frac{V_1 + V_2}{\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2}}. \tag{2.153}$$

O número de mols de gás no final do processo pode ser dado por

$$n' = \frac{P'(V_1 + V_2)}{RT'} = \frac{P'V_1}{RT_1} + \frac{P'V_2}{RT_2}. \tag{2.154}$$

Como a quantidade de matéria se conserva, temos $n' = n_1 + n_2$, o que implica que

$$P' = P. \tag{2.155}$$

(b) Agora é necessário deduzir uma fórmula de entropia do gás perfeito, para isso considere a primeira lei da termodinâmica e use $dS = \frac{dQ}{T}$.

$$dQ = dU + pdV$$

$$dS = \frac{3}{2}nR\frac{dT}{T} + \frac{p}{T}dV. \tag{2.156}$$

Utilizando a equação de Clapeyron, temos que $\frac{p}{T} = \frac{nR}{V}$. Utilizando esse resultado, temos que

$$dS = \frac{3}{2}nR\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}$$

$$S = \frac{3}{2}nR\ln T + nR\ln V + c, \tag{2.157}$$

em que c é uma constante de integração. Utilizando a equação de Clapeyron, podemos substituir a temperatura por $T = \frac{pV}{nR}$, o que nos leva à equação

$$S = \frac{3}{2}nR\ln P + \frac{5}{2}nR\ln V + c', \tag{2.158}$$

na qual c' é uma nova constante de integração, que incorporou os termos constantes que surgem da mudança de variáveis realizada.

A variação de entropia do sistema pode ser então escrita como

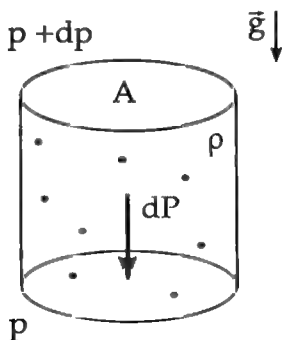
$$\Delta S = \left[\frac{3}{2}(n_1 + n_2)R\ln P + \frac{5}{2}(n_1 + n_2)R\ln(V_1 + V_2)\right] - \left[\frac{3}{2}n_1 R\ln P + \frac{5}{2}n_1 R\ln V_1 + \frac{3}{2}n_2 R\ln P + \frac{5}{2}n_2 R\ln V_2\right]$$

$$\Delta S = \frac{5}{2}(n_1+n_2)R\left[\ln(V_1+V_2) - \frac{n_1}{n_1+n_2}\ln V_1 - \frac{n_2}{n_1+n_2}\ln V_2\right]. \tag{2.159}$$

Substituindo os valores de n_1 e n_2, obtidos no item anterior, e simplificando a equação, temos que

$$\Delta S = \frac{5}{2}P\left[\left(\frac{V_1}{T_1}+\frac{V_2}{T_2}\right)\ln(V_1+V_2) - \frac{V_1}{T_1}\ln V_1 - \frac{V_2}{T_2}\ln V_2\right]. \tag{2.160}$$

2.21 Pressão de uma atmosfera isotérmica

(a) Tomando um cilindro de base com área A e altura dz, temos que a pressão na base do cilindro deve ser maior do que a do topo, devido ao efeito do peso do gás. Portanto, o incremento de pressão com o aumento de altitude dp deve ser negativo. Veja o diagrama a seguir.

O peso das partículas no interior do cilindro é dado por $dp =$

$dm\ g = \rho A g dz$. Por sua vez, a pressão associada à coluna de gás é dada pela razão $|dp| = P/A$. Dessa forma, temos que

$$-dp = \frac{dP}{A} = -\rho g dz$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \tag{2.161}$$

Como queríamos demonstrar.

(b) Utilizaremos a equação de Clapeyron $pV = nRT$ para calcular a densidade do gás. Escrevendo $n = m/M$, onde m é a massa de gás e M sua massa molar média, temos que

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. \tag{2.162}$$

Daí, utilizando o resultado deduzido no item anterior

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pM}{RT}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M}{RT} dz. \tag{2.163}$$

Definindo $\lambda = \frac{M}{RT}$ e integrando a equação diferencial acima, chegamos ao resultado

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp'}{p'} = -\int_0^z \lambda dz'$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\lambda z$$

$$p = p_0 e^{-\lambda z}. \tag{2.164}$$

2.22 Pressão atmosférica em uma nave espacial

Como foi demonstrado em outro exercício, a pressão do gás obedece a seguinte expressão

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g, \tag{2.165}$$

onde densidade do gás é dada por $\rho = pM/RT = p\lambda$ e g é a aceleração da gravidade local.

Esse resultado pode ser utilizado nesse problema, observando que as partículas de ar de massa m sentem-se repelidas do centro da nave girante, no referencial girante solidário a ela, isso é causado pela força centrífuga F_{cfg} que surge nesse referencial não inercial, cuja intensidade é $F_{cfg} = m\Omega r^2$. Dessa maneira, pode-se definir uma "gravidade efetiva" local dada por $g_{ef} = \Omega r^2$, que se assemelha a uma gravidade local sentida em uma pequena vizinhança de um determinado ponto do espaço.

Dessa forma, podemos escrever

$$\frac{dp}{dr} = p\lambda\Omega r^2, \tag{2.166}$$

que pode ser, por sua vez, integrada

$$\int_{p_0}^{p_R} \frac{dp}{p} = \int_0^R \lambda\Omega r^2 dr$$

$$\ln\left(\frac{p_R}{p_0}\right) = -\frac{\lambda\Omega R^3}{3}. \tag{2.167}$$

Finalmente encontramos a razão pedida no enunciado

$$\frac{p_R}{p_0} = \exp\left(\frac{\lambda\Omega R^3}{3}\right). \tag{2.168}$$

2.23 Nuvem de gás quente

A expressão utilizada no exercício anterior, que relaciona a variação de pressão de um gás com respeito a sua densidade e campo gravitacional local, pode ser generalizada para o caso em que tanto a densidade $\rho(r) = \rho_0/r^2$ e campo gravitacional $g(r)$ não uniformes.

Todas essas grandezas dependem da distância ao centro da nuvem quente r, conforme a expressão

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r). \tag{2.169}$$

O valor de $g(r)$ pode ser calculado através da expressão $g(r) = \frac{GM_{int}(r)}{r^2}$, em que $M_{int}(r)$ representa a massa contida no interior de uma esfera de raio r concêntrica à nuvem de gás. Essa quantidade de massa é dada pela integral

$$M_{int}(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')dr' = 4\pi\rho_0 r. \tag{2.170}$$

O que nos leva, portanto, à seguinte expressão para o campo gravitacional no interior da nuvem

$$g(r) = \frac{4\pi G\rho_0}{r}. \tag{2.171}$$

Voltando à equação 2.169, substituindo os resultados encontrados, determina-se qual o comportamento esperado para a pressão do gás

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G\rho^2}{r^3}. \tag{2.172}$$

Considerando que no infinito a nuvem tem pressão nula, temos que

$$P(r) = \frac{2\pi G\rho^2}{r^2}. \tag{2.173}$$

É preciso agora relacionar a pressão e a temperatura do gás na nuvem. Para fazer isso, basta considerar a equação de Clapeyron

$$PV = \frac{m}{M}RT$$

$$T = \frac{PM}{\rho R} = \frac{2\pi G\rho_0}{R}. \tag{2.174}$$

A temperatura da nuvem de gás permanece, portanto, constante em toda a sua extensão.

2.24 Uma troca de Calor Diferente

(a) Se $n = 0$, temos que

$$C(T) = a = \frac{dQ}{dT}. \tag{2.175}$$

A primeira lei da termodinâmica garante que $dQ = dU$, uma vez que não há variação de volume, logo

$$a = \frac{dU}{dT} \rightarrow U = U_0 + aT. \tag{2.176}$$

Escrevendo agora $dS = dQ/T$, temos que

$$a = \frac{dS}{dT}T \rightarrow a\frac{dT}{T} = dS$$

$$S = S_0 + a\ln T. \tag{2.177}$$

(b) Suponha, sem perda de generalidade, $T_1 > T_2$. Para extrair o máximo de trabalho de dois corpos de temperaturas diferentes,

deve-se utilizar uma máquina de Carnot que utiliza o corpo quente como fonte quente e o corpo mais frio como fonte fria. Nesse processo não há aumento de entropia, de tal forma que podemos calcular a temperatura final do sistema T_f da seguinte maneira

$$S_i = S_f$$

$$2S_0 + a\ln T_1 + a\ln T_2 = 2S_0 + 2a\ln T_f$$

$$T_f = \sqrt{T_1 T_2}. \tag{2.178}$$

O trabalho retirado do sistema corresponde à variação da energia interna do sistema

$$W = -\Delta U = (2U_0 + aT_1 + aT_2) - (2U_0 + 2aT_f)$$

$$W = 2a\left(\frac{T_1 + T_2}{2} - \sqrt{T_1 T_2}\right). \tag{2.179}$$

Observe que devido a desigualdade clássica entre as médias aritmética e geométrica (MA $\geq$ MG), temos que $W > 0$.

(c) De maneira análoga ao que foi feito no item (a), temos que

$$aT_n = \frac{dU}{dT} \to U = U_0 + a\frac{T^{n+1}}{n+1}. \tag{2.180}$$

Escrevendo agora $dS = \frac{dQ}{T}$, temos que

$$aT^n = \frac{dS}{dT}T \to aT^{n-1}dT = dS$$

$$S = S_0 + a\frac{T^n}{n}. \tag{2.181}$$

(d) Usando um raciocínio análogo ao desenvolvido no item (b), calculamos a temperatura final do sistema para o qual não há mais diferença de temperatura da qual se possa retirar trabalho e que não apresenta aumento de entropia total do sistema

$$S_{ini} = S_{final}$$

$$\frac{a}{n}(T_1^n + T_2^n) = \frac{2a}{n}T_f^n$$

$$T_f = \sqrt[n]{\frac{T_1^n + T_2^n}{2}}. \tag{2.182}$$

A variação da energia interna do sistema corresponde ao trabalho retirado do sistema

$$W = -\Delta U = \left[2U_0 + \frac{a}{n+1}\left(T_1^{n+1} + T_2^{n+1}\right)\right] - 2\left(U_0 + a\frac{T_f^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$W = \frac{a}{n+1}\left[T_1^{n+1} + T_2^{n+1} - \left(\frac{T_1^n + T_2^n}{2}\right)^{1+1/n}\right]. \tag{2.183}$$

2.25 Gás não-ideal

(a) Diferenciando a expressão $U = 3PV$, temos que

$$dU = 3P\ dV + 3dP\ V. \tag{2.184}$$

Combinando essa expressão com a primeira lei da termodinâmica na sua forma diferencial, temos que $dQ = dU + PdV$. Tomando

$dQ = 0$, uma vez que a transformação é adiabática, segue que

$$dU + P\,dV = 0$$

$$4P\,dV + 3dP\,V = 0. \tag{2.185}$$

Definindo o parâmetro $\gamma = 4/3$ para esse sistema, obtemos o seguinte resultado

$$\gamma P\,dV + dP\,V = 0$$

$$\gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$

$$\gamma \ln V = -\ln P + \text{cte}$$

$$\ln (PV^{\gamma}) = cte. \tag{2.186}$$

Logo, nesse caso temos que a transformação adiabática pode ser descrita a partir da equação $PV^{\gamma} = \text{cte}$, onde $\gamma = 4/3$.

(b) Como as transformações isotérmica e a isobárica se confundem para esse gás, temos que o trabalho dessa transformação é dado por

$$W = P_1(V_2 - V_1). \tag{2.187}$$

A variação de energia interna, por sua vez, é dada por

$$\Delta U = 3P_1V_2 - 3P_1V_1 = 3P_1(V_2 - V_1). \tag{2.188}$$

Utilizando a primeira lei da termodinâmica encontramos o valor desejado da quantidade de calor fornecida ao gás

$$Q_1 = \Delta U + W = 4P_1(V_2 - V_1). \tag{2.189}$$

(c) Analogamente ao que foi feito no item anterior, temos que

$$Q_2 = 4P_2(V_4 - V_3). \tag{2.190}$$

(d) Seguindo a relação proposta no enunciado

$$\frac{T_1}{T_2} = -\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{P_1(V_2 - V_1)}{P_2(V_4 - V_3)}. \tag{2.191}$$

Dos processos adiabáticos realizados podemos tirar as seguintes equações

$$\begin{aligned} P_1 V_2^\gamma &= P_2 V_3^\gamma \\ P_2 V_4^\gamma &= P_1 V_1^\gamma \end{aligned} \tag{2.192}$$

Dividindo a primeira equação pela segunda, temos que

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \rightarrow \frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_4} = \frac{V_1}{V_4}, \tag{2.193}$$

o que nos leva a seguinte relação

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{P_1 V_1}{P_2 V_4}. \tag{2.194}$$

A equação anterior, por sua vez, pode ser escrita apenas em termos da pressão, daí

$$P_2 V_4^\gamma = P_1 V_1^\gamma \rightarrow \frac{V_1}{V_4} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma}. \tag{2.195}$$

Finalmente, chegamos ao seguinte resultado

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1-1/\gamma}, \tag{2.196}$$

que sugere a seguinte relação entre P e T

$$T = P^{1-1/\gamma} = P^{1/4}$$

$$P = T^4. \tag{2.197}$$

(e) Da definição de capacidade calorífica a volume constante c_v, temos que

$$c_v = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_v = \frac{dU}{dT}. \tag{2.198}$$

Mas $dU = 3dP\ V$, uma vez que não há variação do volume do gás $dV = 0$, e ainda $dT = \frac{1}{4}P^{-3/4}dP$

$$c_v = \frac{3P\ V}{\frac{1}{4}P^{-3/4}dP} = 12P^{3/4}V. \tag{2.199}$$

(f) Considere a primeira lei da termodinâmica

$$dST = dU + P\ dV$$

$$dSP^{1/4} = 4P\ dV + 3dP\ V$$

$$dS = 4P^{3/4}\ dV + 3P^{-1/4}V\ dP. \tag{2.200}$$

Dessa equação, podemos retirar as seguintes derivadas parciais

$$\left(\frac{dS}{dV}\right)_P = 4P^{3/4}$$

$$\left(\frac{dS}{dP}\right)_V = 3\frac{V}{P^{1/4}}. \tag{2.201}$$

A solução para esse problema, com a condição de que quando $S = 0$ deve-se ter $T = 0$, é dada por

$$S = 4P^{3/4}V. \tag{2.202}$$

2.26 Distribuição de probabilidade de velocidades de Maxwell

(a) A condição de normalização da probabilidade total pode ser expressa pela equação

$$\int_0^\infty F(v)dv = 1. \tag{2.203}$$

Substituindo $F(v)$ pela distribuição de Maxwell fornecida e fazendo a substituição de variável $x^2 = \frac{mv^2}{2kT}$, segue que

$$1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^2 \exp(-x^2)dx. \tag{2.204}$$

O que é verdade, dado que $\int_0^\infty x^2 \exp(-x^2)du = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

(b) Fazendo $dF/dv = 0$, o que corresponde a achar um máximo da função de distribuição de probabilidade, chegamos em

$$2v\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) + v^2\left(-\frac{mv}{kT}\right)\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) = 0,$$

Que resulta diretamente no seguinte resultado

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \tag{2.205}$$

(c) O valor médio de v é dado por

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty vF(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv. \tag{2.206}$$

Fazendo $x = \frac{mv^2}{2kT}$, a expressão anterior pode ser reescrita como

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \int_0^\infty x \exp(-x) dx = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \tag{2.207}$$

(d) O valor médio de v^2 é dado por

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 F(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv. \tag{2.208}$$

Fazendo $x^2 = \frac{mv^2}{2kT}$, a expressão anterior pode ser reescrita como

$$\langle v^2 \rangle = \frac{8kT}{\sqrt{\pi} m} \int_0^\infty x^4 \exp(-x^2) dx = \frac{3kT}{m}. \tag{2.209}$$

Dessa maneira, a velocidade quadrática média $v_q = \left(\sqrt{\langle v^2 \rangle}\right)$ é dada por

$$v_q = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \tag{2.210}$$

2.27 Vazamento de gás

(a) Seja n a densidade volumétrica de átomos. Tomando um cilindro de base A e altura $\Delta x = v_x \Delta t$, podemos considerar que metade dos átomos seguem para a direita, dessa forma o número de colisões com a parede na área A é

$$N = \frac{1}{2} n (A v_x \Delta t)$$

$$\frac{N}{\Delta t A} = \frac{n}{2} v_x. \qquad (2.211)$$

Deve-se substituir agora o valor da velocidade v_x pelo seu valor médio $\overline{v}_x$. O valor dessa média pode ser estimado através de uma integral que considera todas a direções possíveis com componente horizontal para a direita. Assim,

$$\overline{v}_x = \overline{v} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \; d\theta \; d\varphi = \frac{\overline{v}}{2}. \qquad (2.212)$$

Portanto,

$$\frac{N}{\Delta t A} = \frac{n}{4} \overline{v}. \qquad (2.213)$$

(b) Temos que

$$dN = -\frac{N}{4V} A \overline{v}, \qquad (2.214)$$

o que implica que $N(t)$ obedece uma equação exponencial

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{A\overline{v}}{4V} t}. \qquad (2.215)$$

O tempo τ necessário para que metade das moléculas saiam do recipiente é dado, portanto, por

$$\frac{A\overline{v}}{4V}\tau = \ln 2$$

$$\tau = \frac{4V\ln 2}{A\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}} = \frac{V\ln 2}{A}\sqrt{\frac{2\pi m}{kT}}. \tag{2.216}$$

2.28 Caixa de fótons (Canadá)

A pressão exercida sobre as paredes surge das sucessivas colisões dos fótons, que carregam momento linear, sobre ela. Para estimar o efeito dessas colisões, considere um cilindro um secção de área A e altura de Δx contendo N fótons no seu interior, sendo $n = N/V$ a densidade fótons por unidade de volume. Considere que metade dos fótons se dirigem para a direita e que eles tenham uma componente média de momento linear na direção perpendicular a parede dada por p_x.

A pressão exercida sobre a parede, devido a colisão dos $N/2$ fótons, é dada por

$$P = \frac{2p_x}{A\,\Delta t}\,\frac{N}{2} = \frac{p_x v_x N}{A\,\Delta x} = np_x v_x, \tag{2.217}$$

onde v_x é a velocidade do fóton na componente x, perpendicular à parede da caixa. Sendo θ o ângulo entre a direção da velocidade de um fóton e a direção x, temos que

$$P = \frac{N}{V}pc\ \cos^2\theta. \tag{2.218}$$

Como a energia contida em um fóton é dada por $E = pc$, segue que

$$PV = U\overline{\cos^2\theta}. \tag{2.219}$$

Resta-nos apenas calcular o valor médio de $\cos^2\theta$ para uma distribuição aleatória de velocidade em todas as direções que tem projeção

para a direita. Adotemos a hipótese que todas as direções são equiprováveis, dessa maneira

$$\overline{\cos^2\theta} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\overline{\cos^2\theta} = \left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}. \tag{2.220}$$

Finalmente,

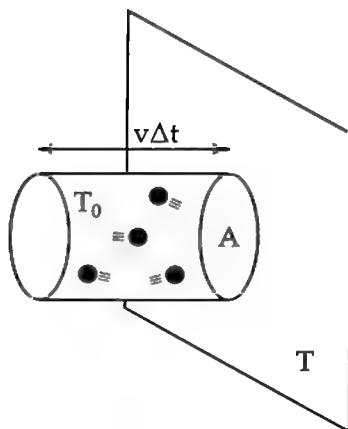
$$PV = \frac{U}{3}. \tag{2.221}$$

2.29 Tapete mágico

(a) Antes de colidir com a parede, as partículas do gás tinham uma distribuição de velocidades $F_{T_0}(v)$ e, após a colisão, passam a adquirir uma nova distribuição de velocidades $F_T(v)$, onde T é a temperatura da superfície. Vamos considerar apenas colisões da direção normal à superfície, por simplicidade.

Quando uma partícula de massa m incide sobre uma superfície com velocidade v e emerge dela com velocidade v', o momento trocado com a superfície é de $\Delta P = m(v + v')$. Para estimar o número de colisões por unidade de área da superfície e de tempo, utilize um cilindro reto de secção transversal de área A e altura $v\Delta t$.

Considerando que metade das partículas contidas nesse cilindro se dirigem para a direita e colidem com a superfície, temos um total de colisões dado por

$$N = \frac{1}{2}n(Av \, \Delta t). \tag{2.222}$$

Dessa maneira, podemos estimar a pressão p do gás sobre a superfície pelas partículas consideradas

$$p = \frac{F}{A} = \frac{N\Delta P}{A\Delta t} = \frac{1}{2}nmv(v + v'). \qquad (2.223)$$

Vamos substituir agora v e v' pelos seus valores quadráticos médios. A velocidade quadrática média de partículas de massa m, a uma temperatura T, é dada por

$$v_q = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \qquad (2.224)$$

Para uma partícula livre, as direções x, y e z são equivalentes, dependendo apenas de uma escolha de eixos, portanto $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$. Como $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, temos que

$$v_q^2 = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2}$$

$$v_{q,x} = \sqrt{\frac{kT}{m}}. \tag{2.225}$$

Segue, portanto, que

$$p = \frac{1}{2} nm \sqrt{\frac{kT_0}{m}} \left(\sqrt{\frac{kT_0}{m}} + \sqrt{\frac{kT}{m}} \right)$$

$$p = \frac{1}{2} nk(T_0 + \sqrt{T\ T_0}). \tag{2.226}$$

(b) Passando as temperaturas para os seus valores absolutos na escala Kelvin, temos que $T_1 = 273$ K e $T_2 = 373$ K, e a temperatura do ar é de $T_0 = 293$ K.

A força que atua sobre o tapete e que corresponde ao peso da carga útil que pode ser suspensa nele é dada pela diferença de forças na parede inferior e superior do tapete

$$F = F_{abaixo} - F_{acima} = (p_{abaixo} - p_{acima})A$$

$$\frac{1}{2} nkA\sqrt{T_0}(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}). \tag{2.227}$$

Considere uma parede em equilíbrio térmico a temperatura T_0 com a atmosfera, cuja pressão denotaremos como p_{atm} =1 atm. Aplicando o resultado do item anterior temos que $p_{atm} = nkT_0$, que nos leva ao seguinte resultado

$$F = p_{atm} A \left(\frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_0}} \right) = 1,6\ 10^4 \text{N}. \tag{2.228}$$

Esse tapete seria, portanto, capaz de levantar uma carga útil de 1600 kg!

(c) Esse resultado claramente não concorda com a observação da natureza: gradientes de temperatura desse tipo não são capazes de levitar cargas dessa ordem de grandeza tão grande. Nessa situação, além de desconsiderar as eventuais trocas de calor das superfícies com o gás, é falsa a premissa de que em ambos os lados observa-se a mesma densidade de partículas n.

Espera-se que nas vizinhanças da superfície fria a densidade de partículas seja maior que na vizinhança da superfície quente, o que teria o efeito de reduzir drasticamente a força calculada anteriormente. Observe que essa mudança de densidade do ar com a temperatura do gás é o fundamento físico por trás do balão, por exemplo.

2.30 Gás ideal 1D

Solução 1: Analogia com teoria dos gases ideais
Modelando a massa m, que bate sucessivamente entre a parede e o bloco de massa M, como um gás monoatômico com um único grau de liberdade, podemos estimar a distância pedida por meio de argumentos termodinâmicos. A energia interna desse gás é identificada como a energia cinética da massa m. Podemos definir, ainda, uma 'temperatura' da massa m usando o teorema da equipartição de energia através da seguinte equação

$$U = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}k_B T. \tag{2.229}$$

A grandeza análoga ao volume nesse gás é a distância x entre o bloco de massa M e a parede, enquanto a grandeza análoga à pressão é a força média F que a massa m exerce na massa M, devido às suas sucessivas colisões. Essa força pode ser estimada a partir da variação de quantidade de movimento do bloco de massa M no tempo

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t}. \tag{2.230}$$

Quando a velocidade da massa m é muito superior a da massa M, podemos aproximar $\Delta P \approx 2mv$ e $\Delta t = 2x/v$, como se a massa M fosse uma parede imóvel. Chegamos, então, ao seguinte resultado, que relaciona a velocidade da massa m com a sua temperatura,

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{mv^2}{x} = \frac{k_B T}{x}. \tag{2.231}$$

A transformação desse gás pode ser identificada como uma compressão adiabática unidimensional, pois não há troca de calor. Escrevemos para esse caso que $dU = -Fdx$, o que implica em

$$\frac{1}{2}k_B dT = -\frac{k_B T}{x}dx$$

$$\frac{dT}{2T} = -\frac{dx}{x}. \tag{2.232}$$

Integrando nas condições iniciais e finais do movimento, temos que

$$x_f = x_0\sqrt{\frac{T_0}{T_f}}. \tag{2.233}$$

Basta calcular agora a temperatura inicial e final do sistema fazendo $T = 2U/k_B$, veja

$$T_0 = \frac{2\left(\frac{m4V^2}{2}\right)}{k_B} = \frac{4mV^2}{k_B}$$

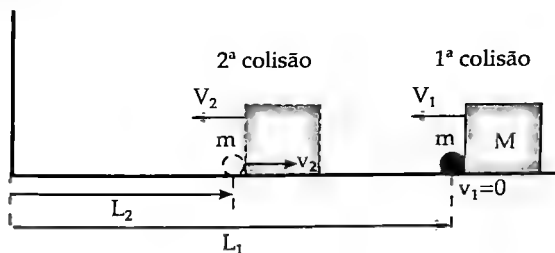
$$T_f = \frac{2(\frac{MV^2}{2})}{k_B} = \frac{MV^2}{k_B}. \tag{2.234}$$

Dessa forma, obtemos

$$x_f = 2x_0\sqrt{\frac{m}{M}}. \tag{2.235}$$

Observação: A expressão $x_f = x_0\sqrt{\frac{T_0}{T_f}}$ também pode ser obtida deduzindo uma expressão análoga à compressão adiabática para o caso unidimensional, bastando mostrar que $\gamma_{1D} = 3$.

Solução 2: Solução por mecânica clássica

Considere as sucessivas colisões entre as massas m e M, suponha que a primeira colisão acontece a uma distância L_1 da parede. Nessa colisão, a velocidade da massa M é $V_0 = V$ e a velocidade da massa é $v_0 = 0$. Defina como L_k, v_k e V_k a distância da parede em que acontece a k-ésima colisão, e as velocidades correspondentes às massas m e M no instante anterior a essa colisão, respectivamente. A figura as seguir ilustra os instantes das duas primeiras colisões e as grandezas envolvidas no problema.

Considere agora uma k-ésima colisão que ocorre enquanto ainda realizando sua aproximação da parede. A velocidade de aproximação das massas inicialmente é dada por $v_{ap} = v_k + V_k$ e a de afastamento é $v_{af} = v_{k+1} - V_{k+1}$. Como a colisão é elástica, temos que

$$\varepsilon = \frac{v_{af}}{v_{ap}} = \frac{v_{k+1} - V_{k+1}}{v_k + V_k} = 1$$

$$v_{k+1} - V_{k+1} = v_k + V_k. \tag{2.236}$$

Considere agora o intervalo de tempo Δt compreendido entre a

k-ésima e a $(k+1)$-ésima colisão. Durante esse intervalo de tempo, a distância percorrida pela massa m é dada por $\Delta l_k = L_k + L_{k+1}$, enquanto a distância percorrida por M é dada por $\Delta L_k = L_k - L_{k+1}$. Segue desses resultados que

$$\Delta t = \frac{L_k + L_{k+1}}{v_{k+1}} = \frac{L_k - L_{k+1}}{V_{k+1}}$$

$$L_k V_{k+1} + L_{k+1} V_{k+1} = L_k v_{k+1} + L_{k+1} v_{k+1}$$

$$L_k (v_{k+1} - V_{k+1}) = L_{k+1} (v_{k+1} + V_{k+1}). \tag{2.237}$$

Combinando as equações 2.236 e 2.237, chegamos à relação

$$L_k (v_k + V_k) = L_{k+1} (v_{k+1} + V_{k+1}), \tag{2.238}$$

isto é, a quantidade $L_k(v_k + V_k)$ é uma grandeza física invariante para qualquer número k de colisões, podendo ser igualada ao valor dessa quantidade na primeira colisão de todas, determinada pelas condições iniciais do problema

$$L_k (v_k + V_k) = x_0 V. \tag{2.239}$$

Para obter a aproximação máxima da massa M, faz-se $V_k = 0$ e determina-se v_k através da conservação da energia mecânica do sistema

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{m v_k^2}{2}$$

$$v_k = \sqrt{\frac{M}{m}} V. \tag{2.240}$$

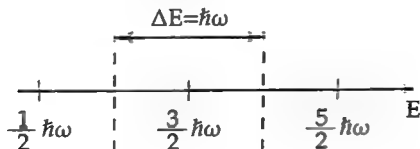
A posição final x_f da massa M é dada, portanto, por

$$x_f \sqrt{\frac{M}{m}} V = x_0 V$$

$$x_f = x_0\sqrt{\frac{m}{M}}. \tag{2.241}$$

Observação: A solução 2 é uma solução exata, enquanto a solução 1 é uma aproximação da verdadeira resposta, apenas. O fator 2 de diferença entre a primeira e a segunda soluções pode ser associado às aproximações feitas na primeira solução, que são (i) supor uma força média sobre a massa M e (ii) supor no cálculo da força média que a velocidade V do bloco de massa M é muito menor que a velocidade v da massa m. Tais apresentações não são razoáveis para descrever o início do movimento, quando acontecem as primeiras colisões.

2.31 Osciladores harmônicos quânticos

(a) Os estados do oscilador harmônico são dados por $\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, em que n é um inteiro não-negativo. Podemos definir um 'comprimento' ocupado por cada estado em um eixo de possíveis valores de energia dado por $\Delta E = \hbar\omega$, como se verifica na figura a seguir.

Dessa maneira, a densidade média de estados por unidade de energia é dada por

$$G(\varepsilon) = \frac{1}{\Delta E} = (\hbar\omega)^{-1}. \tag{2.242}$$

(b) Segundo a distribuição de Boltzmann, podemos associar uma probabilidade de ocupação do estado n como sendo proporcional ao fator de Boltzmann $\exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right)$. Dessa maneira, a energia média

do oscilador harmônico é dada por

$$\overline{u} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar\omega}{kT}\right]}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar\omega}{kT}\right]}. \tag{2.243}$$

Utilizando a aproximação de integral para os somatórios, podemos reescrever a expressão anterior da seguinte forma

$$\overline{u} \approx \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon G(\varepsilon) e^{\varepsilon/kT} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} G(\varepsilon) e^{\varepsilon/kT} d\varepsilon} \tag{2.244}$$

$$\overline{u} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon \left(\frac{1}{\hbar\omega}\right) e^{\varepsilon/kT} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\hbar\omega}\right) e^{\varepsilon/kT} d\varepsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon e^{\varepsilon/kT} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} e^{\varepsilon/kT} d\varepsilon}. \tag{2.245}$$

Definindo $\beta = 1/kT$, podemos reescrever a expressão anterior da seguinte forma

$$\overline{u} = -\frac{d}{d\beta}\left[\ln\left(\int_0^{\infty} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon\right)\right] = -\frac{d}{d\beta}\left[\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)\right]$$

$$\overline{u} = \frac{1}{\beta} = kT. \tag{2.246}$$

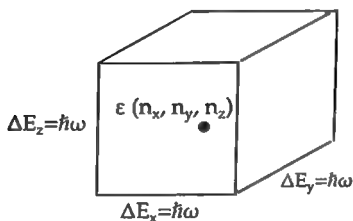
Esse é um resultado conhecido de mecânica estatística. Pode-se atribuir uma energia de $\frac{1}{2}kT$ para cada grau de liberdade de uma partícula livre. No caso de uma partícula confinada em um potencial quadrático, atribui-se uma energia média de $\frac{1}{2}kT$ a sua energia cinética do sistema e $\frac{1}{2}kT$ a sua energia potencial.

(c) Vamos tratar o oscilador tridimensional como a composição de

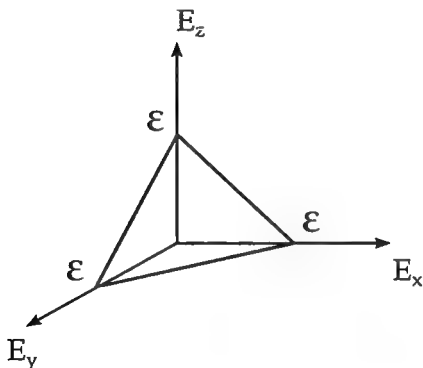
três osciladores unidimensionais independentes. A energia total do oscilador é dada, portanto, pela expressão

$$\varepsilon_{n_x,n_y,n_z} = \left(\frac{3}{2} + n_x + n_y + n_z\right)\hbar\omega. \qquad (2.247)$$

Considere agora um sistema de eixos E_x, E_y e E_z, que representam as energias associadas a cada um dos três osciladores unidimensionais nas direções x, y e z. O 'comprimento' ocupado por cada estado em uma dimensão se converte em um volume de um cubo quando as três dimensões são consideradas

$$\Delta V_1 = (\hbar\omega)^3. \qquad (2.248)$$

Nesse caso, determinar a densidade de estados por energia não é imediato. Isso acontece porque quando o sistema tem três números distintos existem diferentes combinações de n_x, n_y e n_z que resultam na mesma energia.

No espaço tridimensional de energias E_x, E_y e E_z, o volume de estados que têm energia menor que ε pode ser associado a um volume $V(\varepsilon)$, definido por um tetraedro formado pelos três eixos ortogonais e um plano descrito pela equação $\varepsilon = E_x + E_y + E_z$. O tetraedro está ilustrado na figura a seguir e tem o seu volume calculado pela expressão

$$V(\epsilon) = \frac{Bh}{3} = \frac{(\varepsilon^2/2)\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon^3}{6}. \tag{2.249}$$

Precisamos estimar o número de estados com energia entre os valores ε e $\varepsilon + \Delta\varepsilon$. Esse número pode ser estimado a partir do incremento de volume ΔV associado a uma mudança do valor de energia de ε para $\varepsilon + \Delta\varepsilon$. Veja,

$$\Delta V = \frac{dV(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{2}. \tag{2.250}$$

O número de estados desejado pode ser estimado através da razão entre ΔV e ΔV_1. A partir do resultado encontrado, calcula-se a densidade de estados $G(\varepsilon)$ do oscilador tridimensional

$$N = \frac{\Delta V}{\Delta V_1} = \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{2(\hbar\omega)^3} = G(\varepsilon)d\varepsilon$$

$$G(\varepsilon) = \frac{1}{2(\hbar\omega)^3}\varepsilon^2. \tag{2.251}$$

De forma análoga ao discutido no item anterior, podemos calcular

a energia interna do oscilador através da equação 2.244. Como todos os fatores numéricos se cancelam, pois essa quantidade aparece em ambas as integrais da fração, a expressão da energia média do oscilador harmônico é dada por

$$\overline{u} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon^3 e^{\varepsilon/kT} d\varepsilon}{\int_0^\infty \varepsilon^2 e^{\varepsilon/kT} d\varepsilon} = -\frac{d}{d\beta}\left[\ln\left(\int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon\right)\right]. \qquad (2.252)$$

Utilizando o resultado fornecido no enunciado, temos que

$$\overline{u} = -\frac{d}{d\beta}\left[\ln\left(\frac{2}{\beta^3}\right)\right] = \frac{3}{\beta} = 3kT. \qquad (2.253)$$

Note que a observação feita para o item anterior continua válida. Uma quantidade $\frac{1}{2}kT$ de energia pode ser atribuída a cada uma das energia cinéticas e potenciais de cada um dos três graus de liberdade do oscilador harmônico tridimensional.

2.32 Orientando de dipolos elétricos

(a) A distribuição de probabilidade da orientação dos dipolos é proporcional ao fator de Boltzmann e ao ângulo sólido considerado

$$dP \propto e^{-\frac{U}{k_b T}} d\Omega. \qquad (2.254)$$

Considerando o campo elétrico paralelo ao eixo z, podemos utilizar coordenadas esféricas e escrever o diferencial de ângulo sólido a partir do elemento de área de uma esfera de raio R

$$d\Omega = \frac{ds}{R^2} = \frac{R^2 \text{sen}\theta \; d\theta \; d\varphi}{R^2} = \text{sen}\theta \; d\theta \; d\varphi. \qquad (2.255)$$

Efetuando a integração em φ, obtém-se um fator de 2π e uma distribuição de probabilidade

$$dP = f(\theta)d\theta = c\ \exp\left(\frac{pE\cos\theta}{k_bT}\right) 2\pi \text{sen}\theta\ d\theta, \qquad (2.256)$$

onde θ é definido como o sendo o ângulo entre o campo elétrico $\vec{E}$ e o dipolo elétrico $\vec{p}$ e c é uma constante de normalização da função de distribuição de probabilidade.

Utilizando a condição de normalização

$$\int_0^\pi c\ \exp\left(\frac{pE\cos\theta}{k_bT}\right) 2\pi \text{sen}\theta\ d\theta = 1, \qquad (2.257)$$

podemos reescrever a distribuição de probabilidade $f(\theta)$ como

$$f(\theta) = \frac{\exp\left(\frac{pE\cos\theta}{k_bT}\right) \text{sen}\theta\ d\theta}{\displaystyle\int_0^\pi \exp\left(\frac{pE\cos\theta'}{k_bT}\right) \text{sen}\theta'\ d\theta'}. \qquad (2.258)$$

Pode-se calcular a integral I do denominador de $f(\theta)$ utilizando a substituição de variável $u = -\cos\theta'$, daí

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \exp\left(-\frac{pEu}{k_bT}\right) du = -\frac{k_bT}{pE} \exp\left(-\frac{pEu}{k_bT}\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\ &= -\frac{k_bT}{pE}\left(\exp\left(-\frac{pE}{k_bT}\right) - \exp\left(\frac{pE}{k_bT}\right)\right) \end{aligned}$$

$$I = \frac{2k_bT}{pE} \text{senh}\left(\frac{pE}{k_bT}\right). \qquad (2.259)$$

Finalmente chegamos a equação da distribuição de probabilidade de orientação dos dipolos com relação ao campo elétrico

$$f(\theta) = \frac{pE}{2k_bT} \frac{\text{sen}\theta \ \exp\left(\frac{pE}{k_bT}\cos\theta\right)}{\text{senh}\left(\frac{pE}{k_bT}\right)}, \tag{2.260}$$

que pode ser reescrita em termos do parâmetro adimensional $\lambda = \frac{pE}{k_bT}$ como

$$f(\theta) = \frac{\text{sen}\theta \ \lambda \exp(\lambda\cos\theta)}{2 \ \text{senh}(\lambda)}. \tag{2.261}$$

(b) A fração de dipolos alinhados com uma tolerância de $\Delta\theta = 1^o = \frac{\pi}{180}$ rad é dada por

$$P(\theta < \Delta\theta) = \int_0^{\Delta\theta} f(\theta') \, d\theta' = \int_0^{\Delta\theta} \frac{\text{sen}\theta' \ \lambda\exp(\lambda\cos\theta')}{2 \ \text{senh}(\lambda)} \, d\theta. \tag{2.262}$$

Considerando aproximações de pequenos ângulos ($\cos\theta \approx 1$ e $\text{sen}\theta \approx \theta$) para obter aproximações razoáveis para o valor integral, temos que

$$P(\theta < \Delta\theta) \approx \frac{\lambda e^{\lambda}}{2\text{senh}(\lambda)} \int_0^{\Delta\theta} \theta' \, d\theta = \frac{\lambda e^{\lambda}\Delta\theta^2}{4\text{senh}(\lambda)}. \tag{2.263}$$

Substituindo os valores numéricos fornecidos, temos que

$$p = 0,4e\mathring{A} = 6,4.10^{-29}\text{C.m}$$

$$\lambda = \frac{pE}{k_bT} = \frac{6,4.10^{-29} \ 1.10^3}{1,38.10^{-23} \ 300} = 1,5.10^{-5}. \tag{2.264}$$

Como $\lambda << 1$, a fração dos dipolos que está alinhado com o campo elétrico pode ser estimada por

$$\lim_{\lambda \to 0} P(\theta < \Delta\theta) = \frac{\Delta\theta^2}{4} = 7,6.10^{-5}. \tag{2.265}$$

(c) Para que $P(\theta < \Delta\theta) > 0,01$, deve-se satisfazer a seguinte equação

$$\frac{\lambda e^{\lambda} \Delta\theta^2}{4\text{senh}(\lambda)} > 0,01$$

$$\frac{\lambda \Delta\theta^2}{2(1 - e^{-2\lambda})} > 0,01$$

$$\frac{\lambda}{1 - e^{-2\lambda}} > 65,6. \tag{2.266}$$

A equação encontrada é transcendente, ou seja, não é possível expressar sua solução exata por meio de funções elementares. No entanto, pode-se verificar que os valores de λ que satisfazem a equação 2.266 também devem satisfazer a condição $\lambda >> 1$, de tal forma que deduz-se que o valor mínimo λ_{min} que garante 1% dos dipolos alinhados com o campo elétrico é dado por

$$\lambda_{\text{min}} \approx \frac{65,6}{2} = 32,8.$$

Essa condição leva à seguinte condição para o campo elétrico aplicado

$$E > 32,8 \frac{k_b T}{p} \approx 2,1 eV/\mathring{A}.$$

Essa intensidade de campo elétrico é extremamente elevada, demonstrando que obter esse grau de orientação dos dipolos elétricos é experimentalmente impraticável.

2.33 Efeito Schottky

(a) O número de combinações que podem ser obtidas é

$$W = \frac{N!}{N_1!N_2!}. \tag{2.267}$$

(b) Podemos reescrever a expressão anterior como

$$W = \frac{N!}{(N - \frac{E}{\varepsilon})!\,(\frac{E}{\varepsilon})!}. \tag{2.268}$$

(c) Aplicando a expressão fornecida, chegamos ao seguinte resultado

$$S = k \ln\left(\frac{N!}{(N - \frac{E}{\varepsilon})!\,(\frac{E}{\varepsilon})!}\right). \tag{2.269}$$

(d) Reescrevemos a entropia S da seguinte forma

$$S = k\left[\ln(N!) - \ln\left(N - \frac{E}{\varepsilon}\right)! - \ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)!\right], \tag{2.270}$$

que pode ser simplificada utilizando a aproximação de Stirling

$$S = k\left[N\ln(N) - \left(N - \frac{E}{\varepsilon}\right)\ln\left(N - \frac{E}{\varepsilon}\right) - \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\right]. \tag{2.271}$$

Realizando as devidas simplificações algébricas, chegamos ao resultado desejado

$$S = -k\left[\left(1 - \frac{u}{\varepsilon}\right)\ln\left(1 - \frac{u}{\varepsilon}\right) - \frac{u}{\varepsilon}\ln\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right]. \tag{2.272}$$

(e) Da primeira lei da termodinâmica, temos que

$$ds\ T = du + p\ dv. \tag{2.273}$$

Considerando o volume do sistema constante, a temperatura do sistema pode ser calculada como a derivada da entropia com

respeito à energia interna do sistema

$$\frac{1}{T} = \frac{ds}{du}. \tag{2.274}$$

Realizando essa derivação, chegamos ao resultado

$$\frac{1}{T} = \frac{ds}{du} = \frac{k}{\varepsilon}\left[\ln\left(1 - \frac{u}{\varepsilon}\right) - \ln\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right]. \tag{2.275}$$

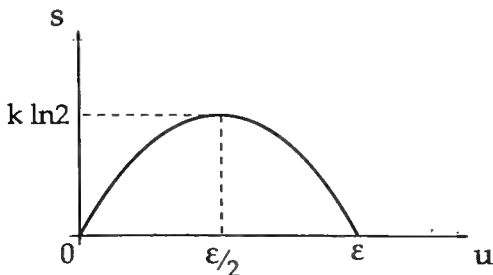
(f) Note que:

i) No caso em que $u = 0$ (assim como $u = \varepsilon$), a entropia do sistema é nula, pois esse valor de energia está associado a uma única configuração.

ii) A função é simétrica em torno de u=$\varepsilon/2$, pois há uma simetria de reflexão descrita por $s(u) = s(\varepsilon - u)$. Isso garante que $u = \epsilon/2$ é ponto de máximo ou mínimo no intervalo de valores possíveis de energia.

iii) $s(\epsilon/2) = k \ln 2$, logo esse é o valor máximo de $s(u)$.

iv) A temperatura calculada em (e) corresponde a derivada de $s(u)$.

Dessa forma, chegamos ao seguinte esboço.

(g) Nesse intervalo de energias a temperatura é negativa. Isso decorre do fato de que o sistema, ao ganhar energia, tende a se organizar, diminuindo a entropia do sistema, o que não é um comportamento comum nos sistemas físicos.

(h) Desenvolvendo a expressão de $1/T$, temos que

$$\frac{\varepsilon}{kT} = \left[\ln\left(1 - \frac{u}{\varepsilon}\right) - \ln\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right]$$

$$e^{\beta\varepsilon} = \frac{1 - \frac{u}{\varepsilon}}{\frac{u}{\varepsilon}},$$

levando ao resultado desejado

$$u = \frac{\varepsilon}{1 + e^{\beta\varepsilon}}. \tag{2.276}$$

(i) Do resultado anterior, temos que

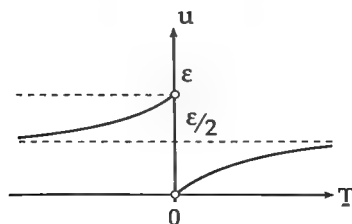
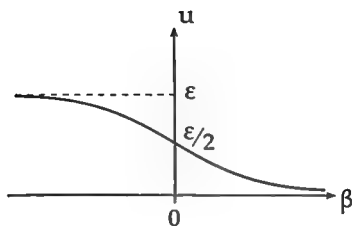
$$P(\varepsilon) = \frac{1}{1 + e^{\beta\varepsilon}}. \tag{2.277}$$

Por sua vez, $P(0)$ pode ser obtido através da normalização das probabilidades

$$P(0) + P(\varepsilon) = 1$$

$$P(0) = 1 - P(\varepsilon) = \frac{e^{\beta\varepsilon}}{1 + e^{\beta\varepsilon}}. \tag{2.278}$$

(j) Para fazer um gráfico de u contra T, considere inicialmente o comportamento de u com respeito ao parâmetro β dado pela equação 2.276, cujo comportamento é ilustrado pela figura a seguir.

Utilizando a relação $\beta = 1/kT$, chegamos ao gráfico desejado.

(k) O calor específico c do sistema pode ser calculado da seguinte forma

$$c = \frac{du}{dT} = \frac{du}{d\beta}\frac{d\beta}{dT}. \tag{2.279}$$

Levando-nos ao seguinte resultado

$$c = -\frac{\varepsilon^2}{(1+e^{\beta\varepsilon})^2} e^{\beta\varepsilon}\left(-\frac{1}{kT^2}\right)$$

$$c = k(\beta\varepsilon)^2 \frac{e^{\beta\varepsilon}}{(1+e^{\beta\varepsilon})^2}. \tag{2.280}$$

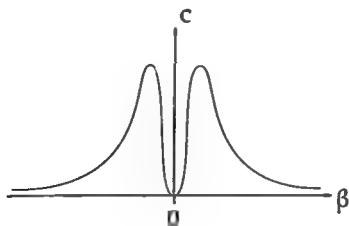
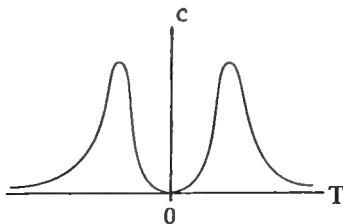
(l) Inicialmente verifiquemos os limites pedidos.

- Limite $\beta\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\beta\epsilon\to 0} k(\beta\epsilon)^2 \frac{e^{\beta\varepsilon}}{(1+e^{\beta\epsilon})^2} = \lim_{\beta\varepsilon\to 0} k(\beta\epsilon)^2 \frac{1}{4} = 0. \quad (2.281)$$

- Limite $\beta\varepsilon \to \infty$:

$$\lim_{\beta\epsilon\to 0} k(\beta\epsilon)^2 \frac{e^{\beta\varepsilon}}{(1+e^{\beta\epsilon})^2} = \lim_{\beta\epsilon\to 0} k(\beta\epsilon)^2 e^{-\beta\epsilon} = 0. \quad (2.282)$$

Pode-se verificar também que o limite $\beta\varepsilon \to -\infty$ também é nulo. O gráfico de capacidade calorífica como função de β tem o comportamento mostrado pela figura a seguir.

Vale lembrar que função $c(\beta)$ não é par. A dependência da capacidade térmica pela temperatura é representada, por sua vez, pelo gráfico a seguir.

2.34 Condensação de Bose-Einstein

(a) Como os fótons são bósons, o mesmo estado de energia pode ser ocupado por vários bósons ao mesmo tempo. Não há nenhum tipo de interação entre diferentes fótons, de tal maneira que a probabilidade de cada fóton ocupar um estado k independe dos demais fótons. Dessa maneira, a probabilidade $p_{nk}(\varepsilon_k)$ de que fótons estejam no estado de energia ε_k é dada por

$$p_{nk}(\varepsilon_k) = (p(\varepsilon_k))^k = e^{-\beta n_k \varepsilon_k}. \tag{2.283}$$

(b) O número médio de fótons num estado k é dado pode ser calculado desenvolvendo a expressão fornecida no enunciado

$$\overline{n_k} = \frac{\displaystyle\sum_{n_i=0}^{\infty} n_i e^{-\beta n_i \varepsilon_k}}{\displaystyle\sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta n_i \varepsilon_k}}. \tag{2.284}$$

Essa expressão pode ser convenientemente reescrita como

$$\overline{n_k} = -\frac{1}{\beta}\frac{d}{d\varepsilon_k}\left[\ln\left(\sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta n_i \varepsilon_k}\right)\right]. \tag{2.285}$$

O somatório dentro do logaritmo é uma série geométrica, o que nos leva ao resultado desejado

$$\overline{n_k} = -\frac{1}{\beta}\frac{d}{d\varepsilon_k}\left[\ln\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon_k}}\right)\right]$$

$$\overline{n_k} = \frac{1}{\beta}\frac{d}{d\varepsilon_k}\left[\ln\left(1-e^{-\beta\varepsilon_k}\right)\right]$$

$$\overline{n_k} = \frac{e^{-\beta\epsilon_k}}{1 - e^{-\beta\epsilon_k}} = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_k} - 1}. \tag{2.286}$$

Esse resultado é conhecido como distribuição de Bose-Einstein.

(c) Podemos chegar a esse resultado a partir da equação de Schördinger para o fóton dentro da caixa

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x, y, z) = E\Psi(x, y, z). \tag{2.287}$$

Segundo o método de separação de variáveis, podemos fatorar a função de onda total em fatores que dependem de uma única coordenada $\Psi(x, y, z) = \phi_x(x)\phi_y(y)\phi_z(z)$. Dessa forma, o problema pode ser dividido em três problemas unidimensionais idênticos dados por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi_q}{dq^2}(q) = E_q\phi_q(q), \tag{2.288}$$

em que a coordenada q pode representar a coordenada x, y ou z. A energia total do sistema pode ser recuperada através da relação $E = E_x + E_y + E_z$.

Definindo-se $E_q = \frac{\hbar^2 k_q^2}{2m}$, a equação que deve ser satisfeita por $\phi_q(q)$ pode ser escrita como

$$\frac{d^2\phi_q}{dq^2}(q) = -k_q^2\phi_q(q), \tag{2.289}$$

que admite solução oscilatória dada por

$$\phi_q(q) = A\text{sen}(k_q q) + B\cos(k_q q). \tag{2.290}$$

Impondo condições de contorno da parede impenetrável, procuramos soluções que satisfação as condições físicas $\phi_q(0) = \phi_q(L) = 0$. Dessa maneira, deduz-se que $B = 0$

$$\text{sen}(k_q L) = 0. \tag{2.291}$$

A escolha de coordenadas feita garante, conforme à primeira equação anterior, que a função de onda seja senoidal. Por sua vez, a segunda equação garante que

$$k_q = \frac{n_q \pi}{L}, \tag{2.292}$$

em que n_q é um número natural positivo.

A grandeza física k_q corresponde à projeção do vetor de onda $\vec{k}$ na direção q. Considerando que o problema tridimensional é obtido a partir do problema unidimensional resolvido para as coordenadas x, y e z, com números quânticos n_x, n_y e n_z independentes, chegamos ao resultado

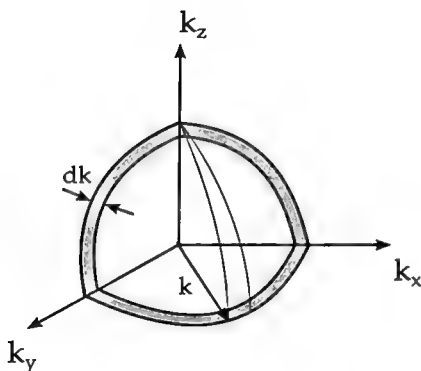
$$\vec{k} = \frac{\pi}{L}(n_x \hat{x} + n_y \hat{y} + n_z \hat{z}). \tag{2.293}$$

(d) Imagine um espaço tridimensional dos vetores de onda $\vec{k}$, cujo sistema de eixos ortogonais é associado a suas componentes k_x, k_y e k_z. As possíveis soluções do fóton podem ser associadas aos vetores $\vec{k}(n_x, n_y, n_z)$, dados pela equação 2.293. É possível definir ainda o módulo do vetor $\vec{k}$ como sendo $k = \frac{n\pi}{L}$, em que $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$.

Nesse espaço tridimensional, podemos identificar o 'volume' $\Delta^3 k$ ocupado por cada um dos estados como sendo igual ao de um cubo de aresta igual a π/L. Daí

$$\Delta^3 k = \left(\frac{\pi}{L}\right)^3. \tag{2.294}$$

Variando o módulo dos vetores de ondas possíveis de um incremento de dk, varremos um volume dV_k correspondente a um oitavo

de uma casca esférica, conforme iustrado na figura a seguir.

Uma vez que estamos interessados apenas em valores positivos de n_x, n_y e n_z, o incremento de volume desejado é dado por

$$dV_k = \frac{1}{8}(4\pi k^2 dk) = \frac{1}{2}\pi k^2 dk. \tag{2.295}$$

Podemos estimar o número de estados com vetores de onda com módulo entre k e $k + dk$ através da razão de volumes

$$dN = \frac{dV_k}{\Delta^3 k} = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{k}\right)^3 \pi k^2 dk. \tag{2.296}$$

Desenvolvendo a expressão e definindo a densidade de estados $g(k)$ a partir do número de estados dN, temos que

$$dN = g(k)dk = \frac{V}{2\pi^2}k^2 dk \tag{2.297}$$

onde V é o volume do sistema, como queríamos demonstrar.

(e) Para partículas não relativísticas, temos que

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m}k^2, \tag{2.298}$$

de onde podemos obter as seguintes relações

$$k = \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} = \sqrt{2m\varepsilon}.$$

$$dk = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}d\varepsilon = \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}d\varepsilon. \tag{2.299}$$

Dessa maneira, podemos definir uma densidade de estados por unidade de energia $g(\varepsilon)$, dada pela relação

$$dN = g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{V}{2\pi^2}2m\varepsilon\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}d\varepsilon, \tag{2.300}$$

o que resulta na expressão desejada

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{V}{\sqrt{2}\pi^2}m^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon. \tag{2.301}$$

(f) Desenvolvendo a expressão fornecida do número total de partículas, temos que

$$N = \int_0^\infty \overline{n_\varepsilon} g(\varepsilon)d\varepsilon$$

$$N = \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_k} - 1}\frac{V}{\sqrt{2}\pi^2}m^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

$$N = \frac{V}{\sqrt{2}\pi^2}m^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta\varepsilon} - 1}d\varepsilon. \tag{2.302}$$

Fazendo a mudança de variável $u = \beta\epsilon$, temos que

$$N = \frac{V}{\sqrt{2}\pi^2} m^{3/2} \beta^{-3/2} \int_0^\infty \frac{u^{1/2}}{e^u - 1} du$$

$$N = \frac{V}{\sqrt{2}\pi^2} m^{3/2} T^{3/2} (1,306\sqrt{\pi}). \tag{2.303}$$

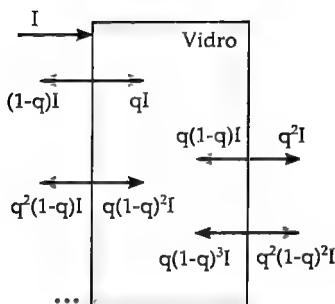
Isolando a temperatura da expressão anterior e definindo a densidade de fótons por unidade de volume $\rho = N/V$, temos que

$$T_c = 1,05 \frac{\pi}{m} \rho^{2/3}. \tag{2.304}$$

3

Ondas e Óptica

3.1 Vidro semi-opaco

Cada vez que o raio de luz incide em uma interface vidro/ar, uma fração q da intensidade da luz é transmitida e uma fração $1-q$ é refletida. Parte da intensidade do raio de luz sofre sucessivas reflexões nas duas superfícies do vidro, conforme mostrado na figura a seguir.

A fração de intensidade raio de luz que não sofre nenhuma reflexão corresponde a q^2I, além dessa fração da energia existe a fração que

sofre 2, 4, 6, ...,$2k$ reflexões sucessivas dentro do vidro. Vamos desprezar nesse problema efeitos de interferência, supondo que não há coerência dos raios de luz, e efetuando apenas a soma de intensidades.

A intensidade de um raio de luz transmitido após sofrer $2k$ colisões é dada por $I_k = q^2(1-q)^{2k}I$. Dessa maneira, estimamos a intensidade luminosa total I_t como a soma das itensidades I_k dos raios de luz

$$I_t = \sum_{k=0}^{\infty} I_k = \sum_{k=0}^{\infty} q^2(1-q)^{2k} I$$

$$I_t = \frac{q^2 I}{1-(1-q)^2}$$

$$I_t = \frac{qI}{2-q}. \tag{3.1}$$

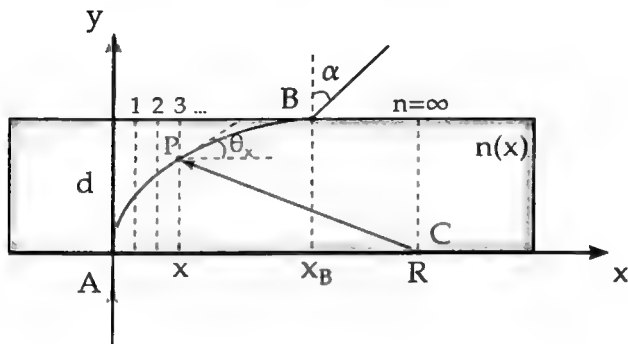
3.2 Luz em um meio não homogêneo

Podemos estudar esse meio não homogêneo considerando diferentes N 'fatias' do material, cada uma com um coeficiente de refração $n(x)$, como mostra a figura a seguir. Em cada interface podemos aplicar a lei de Snell, obtendo uma série de equações:

$$\begin{aligned} n_0 = n_A \text{sen}(90^o) &= n_1 \text{sen}(\theta_1) \\ n_1 \text{sen}(\theta_1) &= n_2 \text{sen}(\theta_2) \\ &\cdots \\ n_N \text{sen}(\theta_N) &= n_B \text{sen}(\theta_B) \\ n_B \text{sen}(\theta_B) &= 1 \text{sen}(\alpha). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dessa maneira, a aplicação da lei de Snell resulta na conservação da quantidade

$$n(x)\text{sen}(\theta_x) = n_0, \tag{3.3}$$

em que θ_x é o ângulo formado pela direção horizontal e a trajetória do raio de luz em função da distância x. Veja a figura a seguir.

Desenvolvendo a equação encontrada, temos que

$$n_0 = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}}\text{sen}(\theta_x)$$

$$\text{sen}(\theta_x) = \frac{R - x}{R}. \tag{3.4}$$

Desse resultado podemos deduzir a trajetória descrita pelo raio de luz. Usando trigonometria básica, podemos obter $\text{tg}(\theta_x)$, que por sua vez é identificada com a função dy/dx. Veja:

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}(\theta_x) = \frac{R - x}{\sqrt{R^2 - (R - x)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{R^2 - (R - x)^2}\right)$$

$$y = \sqrt{R^2 - (R - x)^2} + c, \tag{3.5}$$

onde c é uma constante de integração, cujo valor pode ser obtido com a posição do ponto de incidência da luz no meio não homogêneo $(x, y) = (0, 0)$. Substituindo o ponto inicial da trajetória, verifica-se que $c = 0$.

Reorganizando os termos, temos que

$$(R - x)^2 + y^2 = R^2, \tag{3.6}$$

ou seja, o raio de luz descreve uma trajetória circular de raio R, centrada no ponto $(x_C, y_C) = (R, 0)$.

O ponto x_B é, portanto, determinado pela equação da circunferência

$$d^2 + (R - x_B)^2 = R^2$$

$$x_B = R - \sqrt{R^2 - d^2}. \tag{3.7}$$

O valor de n_B é obtido através de substituição direta do valor de x_B na expressão de $n(x)$, resultando em

$$n_B = \frac{n_0}{\sqrt{1 - \frac{d^2}{R^2}}}. \tag{3.8}$$

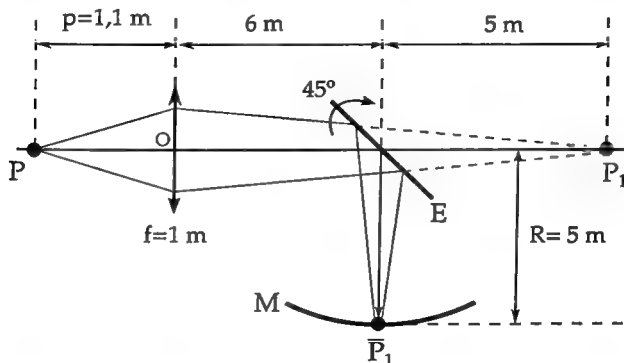
3.3 Medindo a velocidade da luz

A posição da fonte de luz com relação a lente pode ser determinada a partir do fato de que os raios que emergem da lente convergem para o ponto P_1, que está a $p' = 11$ m da lente. Usando a equação de Gauss, temos que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{11} = 1$$

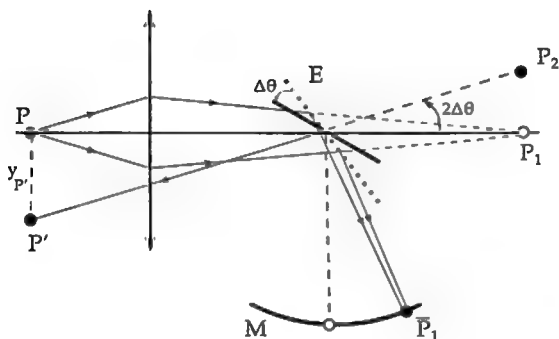
$$p = 1,1\text{m}. \qquad (3.9)$$

Considere a figura a seguir, na qual está representada a situação em que o espelho encontra-se em repouso e faz um ângulo de 45° com respeito a direção horizontal. Pelas propriedades de simetria do espelho plano, temos que os raios que são refletidos pelo espelho E convergem para um ponto $\overline{P}_1$, localizado exatamente na superfície do espelho côncavo.

O ponto $\overline{P}_1$ se comporta, por sua vez, como se fosse um objeto luminoso e o espelho côncavo tem a função de fazer com que os raios de luz realizem o caminho de volta, refletindo-se mais uma vez pelo espelho E e atravessando a lente. Pela propriedade da reversibilidade do raio de luz, a imagem final do ponto P que se forma é focalizada exatamente em P.

Quando o espelho inicia seu movimento de rotação, a posição do espelho na primeira e na segunda incidência de um raio de luz não é mais a mesma. O intervalo de tempo necessário para que o raio refletido

pelo espelho E incida sobre M e volte para E é dado por $\Delta t = \frac{2R}{c}$, que resulta em um ângulo de rotação do espelho $\Delta\theta$, ilustrado pela figura a seguir, que é dado por

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = 2\pi f \frac{2R}{c}$$

$$\Delta\theta = \frac{4\pi R f}{c}. \tag{3.10}$$

Devido à rotação $\Delta\theta$ do espelho, o centro do feixe que volta para a lente deixa de ser o ponto P_1 e passa a ser P_2, obtido através de uma rotação de $2\Delta\theta$ do ponto P_1 em torno do centro do espelho. A distância de P_2 até o eixo óptico da lente pode ser obtida utilizando a aproximação de pequenos ângulos

$$y_{P_2} = R\text{sen}(2\Delta\theta) \approx 2\Delta\theta R$$

$$y_{P_2} = \frac{8\pi R^2 f}{c}. \tag{3.11}$$

O feixe de luz centrado em P_2 incide sobre a lente e é então focalizada para um ponto $\overline{P}$, não coincidente com P. A distância de $\overline{P}$ até o eixo

ótico pode ser calculada tomando o raio notável que passa pela objeto, o centro da lente e a imagem. Desprezando os deslocamentos horizontais devido às rotações, uma vez que estamos lidando apenas com ângulos de rotação pequenos, temos que

$$\frac{y_{P_2}}{y_{P'}} = \frac{11\text{m}}{1,1\text{m}} = 10$$

$$y_{P'} = \frac{y_{P_2}}{10} = \frac{4\pi R^2 f}{5c} = 0,11\text{mm}. \tag{3.12}$$

Isolando o valor **c** da velocidade da luz e substituindo os valores numéricos das grandezas físicas envolvidas, obtemos o resultado desejado

$$c = \frac{4\pi R^2 f}{5y_{P'}} = 2,85.10^8\text{m/s}. \tag{3.13}$$

3.4 Imagem de tamanho fixo

Considere um objeto de tamanho y que esteja a uma distância p da primeira lente, de distância focal f_1. Utilizando a equação podemos localizar a imagem gerada pela primeira lente convergente

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{p_1'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p_1} = \frac{p_1 - f_1}{p_1 f_1}$$

$$p_1' = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1}. \tag{3.14}$$

Suponha que a primeira imagem tenha um tamanho dado por y_1. O aumento da primeira lente nessa situação é dado pela expressão

$$M_1 = \frac{y_1}{y} = -\frac{p_1'}{p_1} = \frac{f_1}{p_1 - f_1}. \tag{3.15}$$

Para a segunda lente, de distância focal f_2, a imagem gerada pela

primeira lente serve de objeto e sua posição relativa à segunda lente é $p_2 = x - p'_1$. A posição p'_2 da imagem final do sistema com relação à segunda lente é obtida de maneira análoga ao que foi feito para a primeira lente

$$p'_2 = \frac{p_2 f_2}{p_2 - f_2} = \frac{(x - p'_1) f_2}{x - p'_1 - f_2}$$

$$p'_2 = \frac{[x(p_1 - f_1) - p_1 f_1]}{(x - f_2)(p_1 - f_1) - p_1 f_1}. \tag{3.16}$$

Suponha que o tamanho da imagem final gerada pelo sistema óptico seja dado por y_2. O aumento da segunda lente é fornecido pela relação

$$M_2 = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{p'_2}{p_2} = \frac{f_2}{p_2 - f_2}$$

$$M_2 = \frac{f_2}{x - p'_1 - f_2} = \frac{(p_1 - f_1) f_2}{[x(p_1 - f_1) - p_1 f_1] - f_2(p_1 - f_1)}. \tag{3.17}$$

O aumento do sistema óptico inteiro é dado pelo aumento de cada uma das lentes

$$M = \frac{y_2}{y} = M_1 M_2 = \frac{f_1 f_2}{[x(p_1 - f_1) - p_1 f_1] - f_2(p_1 - f_1)}$$

$$M = \frac{f_1 f_2}{p_1(x - f_1 - f_2) + f_1(f_2 - x)}. \tag{3.18}$$

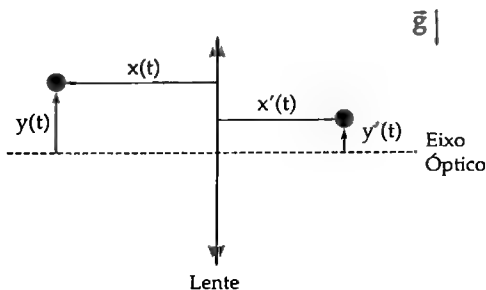
Para que M não dependa do valor da posição p_1 do objeto é necessário que $x - f_1 - f_2 = 0$, daí chega-se a condição

$$x = f_1 + f_2. \tag{3.19}$$

O valor de aumento resultante do sistema óptico nessa situação é fornecido pela expressão

$$M = -\frac{f_2}{f_1}. \tag{3.20}$$

3.5 Imagem de um projétil

Considere um instante t arbitrário, em que a posição do objeto e da imagem são descritos pelas coordenadas $\{x(t), y(t)\}$ e $\{x'(t), y'(t)\}$.

O movimento realizado pelo objeto é um lançamento oblíquo ordinário, composto por um movimento uniforme na direção horizontal e um movimento uniformemente variado na direção vertical. Temos. portanto, que

$$x(t) = d - v\cos\theta t$$

$$y(t) = v\text{sen}\theta t - \frac{g}{2}t^2. \tag{3.21}$$

Aplicando a equação de Gauss para lentes, podemos calcular a posição x' da imagem

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$$

$$x' = \frac{xf}{x-f}, \tag{3.22}$$

a posição y' é, por sua vez, determinada pela equação de aumento transversal

$$y' = \frac{x'}{x}y = -\frac{yf}{x-f}$$

$$y' = -\frac{\left(\frac{g}{2}t^2 - v\text{sen}\theta t\right)f}{v\cos\theta t - (f-d)}. \tag{3.23}$$

Como desejamos que y' varie linearmente, o polinômio de primeiro grau em t que compõe o denominador da fração deve dividir o polinômio de segundo grau do numerador. Para que isso aconteça, basta que eles tenham uma raiz em comum. Dessa maneira a raiz do denominador $t_D = \frac{f-d}{v\cos\theta}$ deve ser igual a raiz não nula $t_N = \frac{2v\text{sen}\theta}{g}$ do numerador. Logo, segue que

$$\frac{f-d}{v\cos\theta} = \frac{2v\text{sen}\theta}{g}$$

$$f - d = \frac{v^2\text{sen}(2\theta)}{g}. \tag{3.24}$$

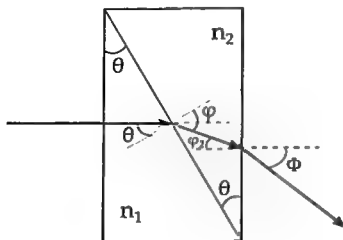
Da equação 3.24, verifica-se que o projétil é lançado de tal maneira que a sua trajetória passa pelo foco da lente. Isolando o valor de sen(2θ) e substituindo os valores numéricos das grandezas físicas envolvidas, chegamos ao resultado desejado

$$\text{sen}(2\theta) = \frac{g(d-f)}{v^2} = \frac{1}{2}$$

$$2\theta = 30^o \quad \text{ou} \quad 2\theta = 150^o$$

$$\theta = 15^o \quad \text{ou} \quad \theta = 75^o. \tag{3.25}$$

3.6 Desvio angular de um par de prismas

Considere a figura que ilustra o caminho percorrido pelo raio de luz. Sejam n_1 e n_2 os índices de refração do primeiro e do segundo prismas.

A incidência do raio de luz sobre a primeira interface, entre o ar e o primeiro prisma, é normal, logo não há alteração na direção do raio de luz. O ângulo de incidência do raio com relação à interface entre os dois prismas é dado por θ.

A lei de Snell, $n_1 \text{sen}\theta = n_2 \text{sen}\Phi_1$, pode ser reescrita considerando a aproximação para ângulos pequenos ($\text{sen}\alpha \approx \alpha$). Temos, portanto, que

$$n_1\theta = n_2\Phi_1 \to \Phi_1 = \frac{n_1}{n_2}\theta. \tag{3.26}$$

O ângulo de incidência Φ_2 do raio sobre a terceira e última interface é dado por

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \theta = \frac{n_1 - n_2}{n_2}\theta. \tag{3.27}$$

Utilizando mais uma vez a lei de Snell, considerando a aproximação de ângulos pequenos, escrevemos

$$n_2\varphi_2 = \Phi$$

$$\Phi = (n_1 - n_2)\theta. \tag{3.28}$$

Logo, a diferença de índices de refração $\Delta n = n_1 - n_2$ é dada pela razão entre Φ e θ

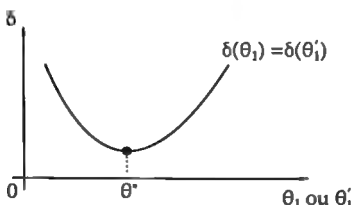
$$\Delta n = \frac{\Phi}{\theta}. \tag{3.29}$$

3.7 Prisma ótico

(a) Considere, por hipótese, a existência de um ângulo de desvio mínimo $\delta_{min}(\theta_1)$ do raio de luz, que acontece para um ângulo de incidência θ_1 e determina um ângulo de saída θ_1' na segunda interface. O princípio da reversibilidade do raio de luz nos garante que

$$\delta(\theta_1) = \delta(\theta_1'), \tag{3.30}$$

em que θ_1' é o ângulo de saída do raio de luz.

Admitindo uma condição de que o desvio mínimo é obtido em apenas um único ponto, conforme se verifica experimentalmente, e que seu valor seja dado por $\delta(\theta^*)$, temos que nessa condição $\theta_1 = \theta_1' = \theta^*$. A figura a seguir traz um esboço da relação que existe entre o ângulo de desvio e os ângulos de incidência e saída.

(b) Aplicando a lei de Snell nas duas superfícies do prisma óptico, obtém-se imediatamente que $\theta_2 = \theta_2'$. O índice de refração do

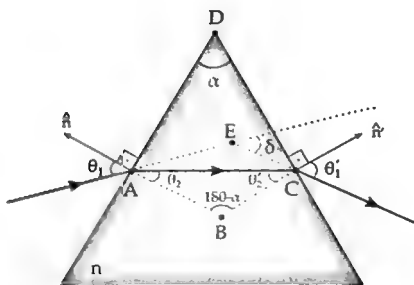
prisma é dado pela expressão

$$n = \frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}(\theta_2)}. \tag{3.31}$$

Considere a figura a seguir, em que o ponto A é o ponto de incidência do raio de luz; o ponto B é o ponto de encontro das normais das superfícies do prisma; o ponto C é o ponto de saída do raio de luz; o ponto D é o vértice do prisma; e o ponto E é o encontro do prolongamento dos raios incidente e emergente do prisma. A soma dos ângulos internos do triângulo ABC garante que

$$\theta_2 + \theta_2' = \alpha. \tag{3.32}$$

Temos, portanto, que

$$n = \frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}(\alpha/2)}. \tag{3.33}$$

Observe o quadrilátero ABCD, formado pelas faces do prisma e as retas normais a suas faces. Da soma dos ângulos internos do quadrilátero, que corresponde a 360^o, resulta no fato do ângulo $A\hat{B}C = 180^o - \alpha$.

Em seguida, observando o quadrilátero ABCE, temos que

$$\theta_1 + (180^o - \delta) + \theta_1' + (180^o - \alpha) = 360^o$$

$$\theta_1 + \theta_1' = \alpha + \delta$$

$$\theta_1 = \frac{\alpha + \delta}{2}. \tag{3.34}$$

Chegamos, por fim, ao resultado desejado

$$n = \frac{\text{sen}\left[\frac{1}{2}(\delta + \alpha)\right]}{\text{sen}(\alpha/2)}. \tag{3.35}$$

(c) Nesse caso, estamos interessados em incidências quase normais, em que são válidas as aproximações de pequenos ângulos. Nesse contexto, a aplicação da lei de Snell nas duas superfícies do prisma resulta em $\theta_1 = n\theta_2$ e $\theta_1' = n\theta_2'$.

Essas equações, combinadas com a equacão 3.32, resulta em

$$\theta_1 + \theta_1' = n\alpha. \tag{3.36}$$

Conforme a demonstração elaborada para o caso geral, o desvio do raio de luz é dado por

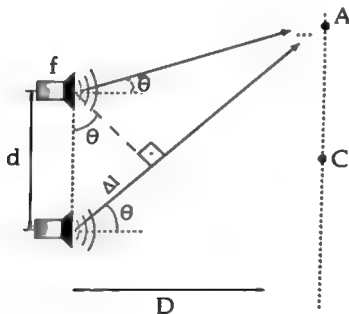
$$\delta = \theta_1 + \theta_1' - \theta_2 - \theta_2', \tag{3.37}$$

que, nesse caso particular, leva ao seguinte resultado

$$\delta = n\alpha - \alpha = (n-1)\alpha. \tag{3.38}$$

3.8 Interferência entre alto-falantes

(a) Por simetria, o caminho percorrido pelas ondas emitidas de cada um dos alto-falantes é idêntico. Dessa maneira, qualquer diferença de fase, observada no ponto C, entre as ondas emitidas por cada uma das fontes deve-se apenas à defasagem das mesmas. Por fim, como a interferência observada em C é destrutiva, concluímos que $\Delta\varphi = \pi$.

(b) Como $D = 20d$, podemos considerar a aproximação $D >> d$ e considerar que os raios que descrevem o caminho de cada uma das pontes ao ponto A são aproximadamente paralelos. Observe a figura a seguir.

Traçando uma reta perpendicular ao caminho entre o ponto A e a fonte F_2, passando pela fonte F_1, podemos calcular uma boa aproximação para a diferença de caminho entre as duas ondas que chegam em A

$$\Delta l = d\text{sen}\theta. \tag{3.39}$$

Para se chegar a um ponto de interferência máxima, é necessário que a diferença de fase entre as duas fases seja um múltiplo de 2π,

assim obtemos os ângulos que localizam os pontos de interferência construtiva

$$k\Delta l + \Delta\varphi = 2k\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}d\text{sen}\theta + \pi = 2k\pi$$

$$\text{sen}\theta = (2k-1)\frac{\lambda}{2d}. \tag{3.40}$$

O primeiro ponto desejado é identificado pelo ângulo

$$\text{sen}\theta = \frac{\lambda}{2d} = \frac{v_{som}}{2df} = 0,097. \tag{3.41}$$

Observe que é possível adotar a aproximação de pequenos ângulos para θ, de tal forma que podemos igualar os valores de sua tangente ao do seu seno $\text{sen}\theta \approx \text{tg}\theta$. Segue, portanto, que

$$\frac{y}{D} = 0,097 \rightarrow y = 0,97m. \tag{3.42}$$

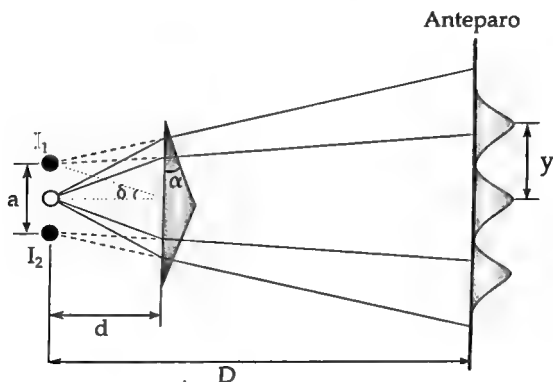
(c) Para responder essa pergunta, basta recordar-se que a intensidade de uma onda é proporcional a sua amplitude ao quadrado. Sendo α a amplitude da onda produzida por uma das fontes consideradas, temos que a onda resultante nos pontos de interferência construtiva tem amplitude de 2α. Temos, portanto, que

$$\frac{I}{I_0} = \frac{(2\alpha)^2}{\alpha^2} = 4$$

$$I = 4I_0. \tag{3.43}$$

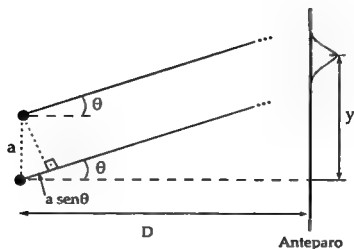
3.9 Experimento de Young com prismas

No problema 3.7 foi mostrado que o desvio angular causado por um prisma de pequena abertura, como o nosso caso, é dado por $\delta = (n-1)\alpha$. O resultado disso é a formação de uma imagem virtual girada de um ângulo δ por cada um dos prismas em sentidos opostos.

Dessa maneira, pode-se perceber que o efeito dos prismas é criar duas imagens virtuais, I_1 e I_2, responsáveis pelo padrão de interferência idêntico ao observado no experimento de Young.

A separação entre as duas imagens pode ser calculada como $a = 2d\text{tg}\delta$. Como desvio angular do prisma é pequeno, temos que $\delta \approx \text{tg}\delta$, portanto

$$a = 2d\delta = 2(n-1)d\ \alpha$$

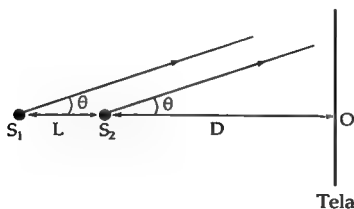
Do experimento de Young, temos que a distância entre dois máximos seguidos é obtida através de uma diferença de caminhos de um comprimento de onda. Seja θ o ângulo de direção dos raios de luz que se dirigem ao anteparo.

O primeiro máximo luminoso distinto da posição $\theta = 0$ é dado por

$\text{sen}\theta = \lambda/a$. Como é um ângulo pequeno, podemos tomar a aproximação $\text{sen}\theta = y/D$. Dessa maneira, temos que

$$y = \frac{\lambda D}{a}$$

$$y = \frac{\lambda D}{2(n-1)d\,\alpha}. \tag{3.44}$$

3.10 Interferência em anteparo

(a) Considere dois raios de luz, que saem das fontes S_1 e S_2 e formam um ângulo θ com a reta que contém as fontes e o ponto O da tela, ilustrados na figura a seguir.

Como $D >> L$, podemos utilizar a aproximação dos raios quase

paralelos, segundo a qual esses dois raios se encontram na tela e a diferença de caminho entre eles é dada por

$$\Delta l = L\cos\theta = 2\lambda\cos\theta. \tag{3.45}$$

Para ângulos pequenos, que correspondem a vizinhança do ponto O, temos que $\cos\theta \approx 1$, o que faz com que a diferença de caminho entre os raios seja aproximadamente igual a 2λ. Como a diferença de caminho é um múltiplo inteiro de λ, temos interferência construtiva em torno de O, como queríamos demonstrar.

(b) O segundo ângulo em que ocorre um máximo de interferência é tal que

$$\Delta l = 2\lambda\cos\theta = \lambda$$

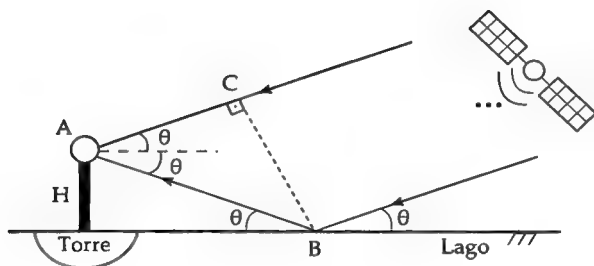
$$\cos\theta = \frac{1}{2}. \tag{3.46}$$

Temos então que o raio do anel brilhante é dado por

$$\text{tg}\theta = \frac{r}{D}$$

$$r = D\text{tg}\theta = \sqrt{3}D. \tag{3.47}$$

3.11 Interferência em um lago

Considere a figura a seguir, em que estão ilustrados dois caminhos possíveis para a onda emitida pelo satélite atingir o receptor da torre, representado pelo ponto A. O primeiro caminho possível passa pelo ponto C e corresponde ao caminho direto entre o satélite e a torre, já o segundo caminho sofre uma reflexão no ponto B do lago.

A diferença de distância percorrida pelos dois caminhos é dada pela diferença

$$\Delta l = \overline{AB} - \overline{AC}$$

$$\Delta l = \frac{H}{\text{sen}\theta} - \frac{H}{\text{sen}\theta}\cos(2\theta)$$

$$\Delta l = 2H\text{sen}\theta. \tag{3.48}$$

Como $\theta = 3^o$ e $\theta = 6^o$ correspondem a dois máximos seguidos, devemos ter

$$2H\text{sen}\theta_2 - 2H\text{sen}\theta_1 = \lambda, \tag{3.49}$$

de tal forma que o comprimento de onda emitido pelo satélite é dado por

$$\lambda = 2H(\text{sen}\theta_2 - \text{sen}\theta_1) = 0,42 \text{ m}. \tag{3.50}$$

3.12 Cavidade ressonante de um LASER

(a) O cálculo das frequências possíveis das ondas estacionárias compatíveis com o comprimento da cavidade do laser pode ser feito

igualando o comprimento da cavidade a um número inteiro de semi-comprimentos de onda

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}, \tag{3.51}$$

em que λ_n representa o comprimento de onda do n-ésimo modo normal permitido pela cavidade LASER.

A formulação feita é análoga ao de uma corda com extremidades fixas, como uma corda de violão. Temos ainda que $c = \lambda_n f_n$. Combinando as duas equações e isolando o valor da frequência f_n do n-ésimo modo, temos que

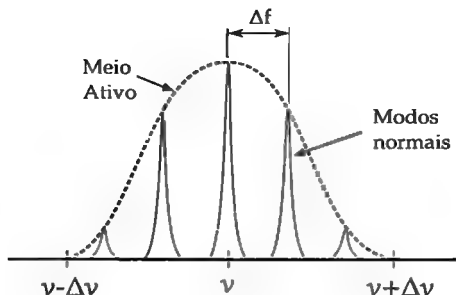
$$f_n = n\frac{c}{2L}. \tag{3.52}$$

(b) Aplicando o resultado do item anterior, com os valores numéricos fornecidos nesse item, obtemos

$$n\frac{3.10^8}{2 \times 1,5} = 5.10^{14}$$

$$n = 5.10^6. \tag{3.53}$$

(c) Suponha que a luz emitida pelo meio ativo do LASER tenha um espectro centrado na frequência ν e largura $\Delta\nu$, isso significa que o meio que emite luz é capaz de emitir luz nesse intervalo contínuo de frequências. O espectro esperado da luz emitida pela cavidade LASER está ilustrado na figura a seguir.

Segue do resultado do item anterior que as frequências dos modos normais da cavidade estão espaçadas de $\Delta f = c/2L$. Deve-se agora determinar quantos modos normais de oscilação dentro da cavidade podem ser obtidos, o que pode ser feito contando quantos números inteiros n satisfazem a desigualdade

$$\nu - \Delta\nu \leq f_n \leq \nu + \Delta\nu$$

$$5.10^{14} - 10^9 \leq n\frac{c}{2L} \leq 5.10^{14} + 10^9$$

$$5.000.000 - 10 \leq n \leq 5.000.000 + 10. \qquad (3.54)$$

Portanto, existem $\Delta n = 21$ modos possíveis que compõem o espectro do LASER considerado.

(d) Nesse item queremos calcular o valor máximo do comprimento da cavidade LASER para que apenas um modo de oscilação esteja contido entre os valores $\nu \pm \Delta\nu$. Dessa maneira, basta considerar a inequação

$$\Delta\nu < f_n - f_{n-1} = \frac{c}{2L}$$

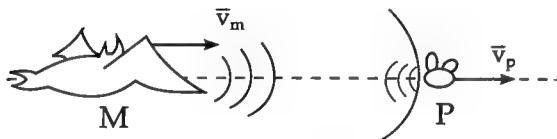
$$L < \frac{c}{2\Delta\nu}. \qquad (3.55)$$

O comprimento máximo da cavidade é dado, portanto, pela ex-

pressão

$$L_{max} = \frac{c}{2\Delta\nu} = 0,15 \text{ m}. \tag{3.56}$$

3.13 Sonar do morcego

Considere inicialmente que a presa esteja se afastando do morcego com uma velocidade v_p desconhecida, como indica a figura a seguir.

A frequência f_1 do ultrassom percebida pela presa é diferente da frequência natural f_0 graças ao movimento do morcego e da sua presa. A frequência f_1 pode ser calculada a partir da equação

$$f_1 = f_0 \frac{c - v_p}{c - v_m}. \tag{3.57}$$

As frentes de onda que incidem na presa são refletidas para o ambiente, de tal forma que ele passa a ser uma fonte de ondas de frequência f_1. Devido novamente ao movimento relativo entre o morcego e sua presa, o som do eco percebido pelo morcego não é f_1, mas sim f_{eco}, que é dado pela relação

$$f_{eco} = f_1 \frac{c + v_m}{c + v_p} \tag{3.58}$$

Combinando os dois efeitos Doppler, podemos relacionar a frequência natural f_0 do ultrassom emitido pelo morcego e a frequência de eco f_{eco} percebida por ele, obtendo a equação

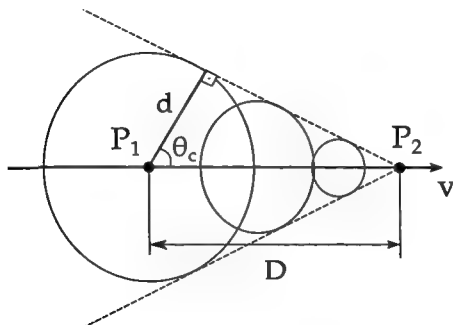
$$\frac{f_{eco}}{f_0} = \frac{(c - v_p)(c + v_m)}{(c + v_p)(c - v_m)}$$

$$\frac{340 - v_p}{340 + v_p} = \frac{40,4}{40} . \frac{335}{345} = 0,98. \tag{3.59}$$

Finalmente, obtemos o valor da velocidade v_p da presa

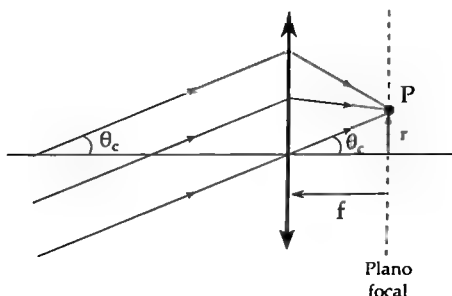
$$v_p = 3,43 \text{ m/s}. \tag{3.60}$$

3.14 Radiação Cerenkov

(a) A cada instante, uma onda esférica é produzida pela carga elétrica e viaja de forma isotrópica com velocidade c/n, enquanto a partícula viaja com uma velocidade v. Considere o intervalo de tempo em que a partícula sai do ponto P_1 e chega em P_2, percorrendo uma distância D, e a frente de onda emitida no instante inicial percorre uma distância d, como está ilustrado a seguir.

Observando a figura, temos que

$$\cos\theta_c = \frac{d}{D} = \frac{(c/n)\Delta t}{c\Delta t} = \frac{c}{nv}$$

$$\cos\theta_c = \frac{1}{\beta n}. \tag{3.61}$$

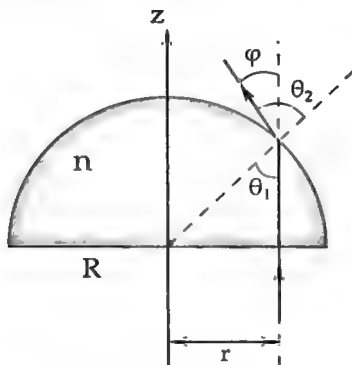
(b) Considere raios de luz perpendiculares paralelos, que representam a frente de onda emitida pela partícula em movimento. Ao incidir sobre a lente esférica, os raios convergem para um ponto do plano focal, distante de $R/2$ da lente. A convergência dos raios acontece de forma análoga a de um corpo infinitamente distante da lente, cujos raios de luz chegam nela praticamente paralelos.

Para calcular a distância desse ponto para o eixo principal da lente, basta desenhar o raio notável que passa pelo centro da lente e não muda de direção. Observando a trajetória do raio notável, temos que

$$\text{tg}\theta_c = \frac{r}{f} = \frac{2r}{R}$$

$$r = \frac{R}{2}\text{tg}\theta_c. \tag{3.62}$$

Como existe uma simetria axial do problema, temos que há a formação de um anel luminoso de raio r centrado no eixo principal da lente.

3.15 Levitação óptica

Considere um raio de luz que viaja paralelo ao eixo de simetria e dista deste de um comprimento r, conforme a ilustração a seguir. Como a incidência dos raios de luz na face plana do hemisfério é normal, não há alterações de direção de propagação nos raios de luz nessa interface.

Na superfície curva do hemisfério, no entanto, os raios de luz deixam direção vertical. Como $\delta << R$, podemos utilizar as aproximações de pequenos ângulos para os ângulos de incidência θ_1 e de refração θ_2. Da figura temos que $\theta_1 \approx r/R$.

A aplicação da lei de Snell nesse problema nos garante que

$$n\text{sen}\theta_1 = \text{sen}\theta_2$$

$$n\frac{r}{R} = \theta_2. \tag{3.63}$$

O desvio angular entre a direção final do raio de luz e a vertical é dado por

$$\varphi = \theta_2 - \theta_1 = (n-1)\frac{r}{R}. \tag{3.64}$$

A relação entre energia e momento carregado por um raio de luz é $E = pc$. A refração descrita anteriormente tem como consequência diminuir a componente vertical do momento transportado pela luz, decorrente desse efeito surge uma força vertical para cima sobre o hemisfério causada pela refração da luz. A variação da componente de momento transportada pelo raio de luz considerado anteriormente é dada por

$$dp_z = \frac{dE}{c}(1 - \cos\varphi). \tag{3.65}$$

Uma vez que estamos tratando de ângulos pequenos, fazendo a aproximação para ângulos pequenos $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$. Dessa maneira,

$$dp_z = \frac{dE}{2c}\varphi^2 = \frac{(n-1)^2 r^2}{2cR^2} dE. \tag{3.66}$$

Vamos supor agora que a energia esteja uniformemente distribuída na secção transversal do feixe do laser, sendo a intensidade do laser dada por

$$I = \frac{dE}{Adt} = \frac{P}{\pi\delta^2}. \tag{3.67}$$

Adotando coordenadas polares (r, ϕ) para escrever o elemento de área acertado pelo raio de luz estudado, temos que $dE = Ir\, dr d\phi dt$, o que implica em

$$dp_z = \frac{I(n-1)^2}{2cR^2} r^3 \, dr d\phi dt. \tag{3.68}$$

A força exercida no hemisfério é dada pela quantidade de momento transferido na direção z por unidade de tempo por todos os raios contidos na secção transversal do laser

$$F_z = \frac{I(n-1)^2}{2cR^2} \int_0^\delta r^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$F_z = \frac{I\pi}{c}\left[\frac{(n-1)\delta^2}{2}\right]^2. \tag{3.69}$$

Substituindo o valor de da intensidade do laser I, temos que

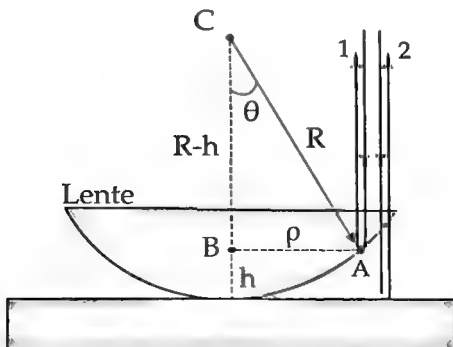
$$F_z = \frac{P}{c}\left[\frac{(n-1)\delta}{2}\right]^2. \tag{3.70}$$

Finalmente, para calcular a potência mínima necessária para levitar o hemisfério basta igualar a força F_z com o peso $P = mg$ do hemisfério. Dessa igualdade, obtém-se o valor da potência necessária para a flutuação óptica ser observada

$$mg = \frac{P}{c}\left[\frac{(n-1)\delta}{2}\right]^2$$

$$P = mgc\left[\frac{2}{(n-1)\delta}\right]^2. \tag{3.71}$$

3.16 Anéis de Newton

(a) Na figura, podemos observar um triângulo retângulo ΔABC de hipotenusa de comprimento R e de catetos cujos comprimentos são dados por $(R-h)$ e ρ.

Do teorema de Pitágoras, temos que

$$R^2 = (R - h)^2 + \rho^2$$

$$h^2 - 2Rh + \rho^2 = 0. \quad (3.72)$$

Considere que o ângulo entre os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ é θ, que deve ser pequeno pelo fato da lente ser delgada. Logo podem ser feitas as seguintes aproximações

$$h = R(1 - \cos\theta) \approx \frac{R\theta^2}{2}$$

$$\frac{h}{\rho} = \frac{\theta}{2} << 1. \quad (3.73)$$

Observe que $\rho >> h$. Temos, portanto que $\rho^2 = 2Rh$.

(b) Considere dois raios de luz que percorrem diferentes caminhos óticos. Ambos os raios refratam para dentro da lente, sendo que o primeiro ao incidir sobre a face não plana da lente reflete, enquanto o segundo refrata, sendo refletido apenas na placa de vidro sobre a qual repousa a lente. A diferença de caminho entre os dois raio pode ser aproximada por $\Delta L = 2h$.

Vamos considerar que há inversão de fase do raio de luz quando ele viaja em um meio pouco refringente (n pequeno) e reflete em uma interface com um meio mais refringente (n grande). Dessa forma, há inversão de fase somente na reflexão do raio 2 na placa de vidro.

A condição do n-ésimo anel claro é que

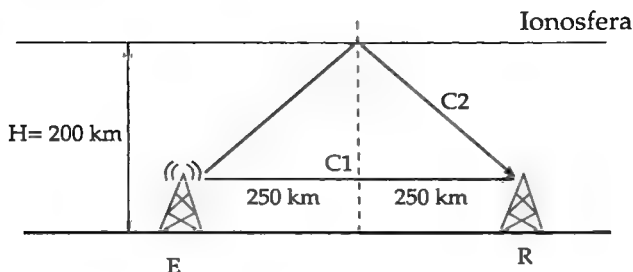
$$\Delta L_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\lambda = 2h_n. \quad (3.74)$$

Utilizando o resultado do item anterior, temos que

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\lambda = \frac{\rho_n^2}{R}$$

$$\rho_n = \sqrt{\left(n - \frac{1}{2}\right)\lambda R}, \; n = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.75}$$

3.17 Ionosfera em movimento

Nesse problema considere duas torres de rádio uma emissora (Torre E) e uma receptora (Torre R), conforme a ilustração a seguir. No receptor há a interferência entre duas ondas, uma que percorreu o caminho direto entre a emissora e o receptor e uma onda que sofreu uma reflexão na ionosfera. Desconsideraremos qualquer alteração de fase que a onda possa sofrer na ionosfera.

A distância percorrida no caminho direto corresponde a distância entre as torres é igual a $d_1 = 500$ km. A distância percorrida pelo sinal de rádio no segundo caminho pode ser calculada como sendo o dobro da hipotenusa do triângulo retângulo de catetos de comprimentos 250 km e H. Temos, portanto, que

$$d_2 = 2\sqrt{250^2 + H^2}. \tag{3.76}$$

Vamos considerar que a ionosfera pode ser tratada como um espelho que se movimenta com relação ao solo com velocidade constante, dessa forma a altura da ionosfera pode ser escrita como $H(t) = H_0 + vt$, onde $H_0 = 200$ km e v é a sua velocidade com respeito ao solo. Considere ainda que a variação de altura da ionosfera é pequena com respeito a sua altidude, isto é, $vt << H_0 = 200$ km. Desprezando termos da ordem $(vt)^2$, temos que

$$d_2 = 2\sqrt{250^2 + (200 + vt)^2} \approx 20\sqrt{25^2 + 20^2 + 4vt}$$

$$d_2 \approx 640\sqrt{1 + \frac{4vt}{1025}}. \tag{3.77}$$

Considerando que estamos no limite de pequenas mudanças de altitude, temos que $\frac{4vt}{1025} << 1$. Dessa maneira, podemos utilizar a aproximação de Bernoulli $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, onde $x << 1$. Dessa maneira, o caminho do segundo caminho percorrido pode ser escrito como aproximadamente

$$d_2 \approx 640\left(1 + \frac{2vt}{1025}\right). \tag{3.78}$$

A diferença de percurso entre os dois caminhos é dada por

$$\Delta d = d_2 - d_1 \approx 140 + 1,25vt. \tag{3.79}$$

Observe que a medida que a diferença de distâncias Δd varia, podemos observar interferências construtivas ou destrutivas. Como oito interferências construtivas por minuto são detectadas, temos que ao longo de t_0 =1 min= 60s a diferença de caminho aumenta de 8 comprimentos de onda

$$1,25vt = 8\lambda. \tag{3.80}$$

Daí, sabendo que $\lambda = \frac{c}{f} = 30$ m, chegamos ao resultado desejado

$$v = \frac{8\lambda}{1,25t_0} = \frac{8\ 30\text{m}}{1,25\ 60\text{s}} = 3,2\text{m/s}. \tag{3.81}$$

Observação: Consideramos nessa solução que a ionosfera esteja se afastando da Terra, a situação em que a ionosfera se aproxima da Terra é análoga e resulta na mesma velocidade de $v = 3,2$m/s.

3.18 Diâmetro de uma objetiva

Devido a efeitos de difração, instrumentos óticos de abertura circular tem uma limitação de resolução associada ao comprimento de onda utilizado. A fórmula de Airy fornece o poder separador de instrumentos óticos de abertura circular

$$\Delta\theta \approx 0,61\frac{\lambda}{a}, \tag{3.82}$$

onde $\Delta\theta$ é a separação angular mínima entre dois pontos para que eles sejam distinguidos por uma lente de raio a.

A seperação angular desejada para o telescópio em questão é dada por

$$\Delta\theta = \frac{0,12\text{m}}{10\text{km}} = 1,2.10^{-5}\text{rad}. \tag{3.83}$$

O diâmetro mínimo da lente ϕ é dado, portanto, por

$$\phi = 1,22\frac{\lambda}{\Delta\theta} = 0,061\text{m}. \tag{3.84}$$

3.19 Física de uma câmera digital

(a) A qualidade da imagem registrada por uma câmera digital pode ser limitada pela resolução espacial do sensor ou por efeitos de difração da lente através a abertura circular.

A resolução máxima de uma abertura de diâmetro D pode ser estimada pelo critério de Rayleigh. Segundo esse critério não é possível obter uma resolução maior que a abertura dada por

$$\theta_R = 1,22\frac{\lambda}{D}. \tag{3.85}$$

Supondo que os objetos que a câmera fotografará estão à distâncias da ordem de metros, muito maiores do que as distâncias focais das lentes disponíveis, podemos supor que a distância entre a lente e o sensor CCD é dada pela distância focal f. Dessa maneira a melhor resolução espacial que pode obtida pela lente é de

$$\Delta x = f\Delta_R = 1,22f\frac{\lambda}{D}$$

$$\Delta x = 1,22\lambda F\#. \tag{3.86}$$

Para obtermos a melhor resolução possível, devemos tomar a lente de menor número F. Dessa maneira, a melhor resolução espacial $\Delta x_{\rm min}$ possível para o comprimento de onda de $\lambda = 500$ nm é de

$$\Delta x_{\rm min} = 1,22.500 \text{ nm}.2 = 1,22\mu\text{m}. \tag{3.87}$$

(b) Para resolver esse problema, basta dividir o sensor quadrado de lado $L = 35$ mm em quadrado de lado $\Delta x_{\rm min}$ e verificar o número de quadrados (ou pixels) necessários. Dessa maneira, temos

$N = \frac{L^2}{\Delta x^2_{\rm min}}$

$$N = 823.10^6\text{pix} = 823\text{Mpix}. \tag{3.88}$$

(c) Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, combinada com o resultado dado pela equação 3.86, temos que a relação entre o número de pixels N, o comprimento de onda λ e a aresta L do sensor CCD é dada pela equação

$$N = \left(\frac{L}{1,22\lambda.F\#}\right)^2. \tag{3.89}$$

Isolando o número F da lente, temos que

$$F\# = \frac{L}{1,22\lambda.\sqrt{N}}. \tag{3.90}$$

Substituindo os valores fornecidos pelo enunciado, encontramos um valor máximo $F\# = 14,3$. que não é um valor encontrado no mercado. Dizer que os fotógrafos escolhem o menor valor de abertura possível é equivalente a dizer que escolher o maior valor $F\#$ disponível. Concluímos portanto que a lente comercial que deve ser usada pelo fotógrafo é a de número $F\# = 11$.

(d) A partir da resolução angular do olho humano pode ser calculada através da expressão

$$\varphi = \frac{l}{z}, \tag{3.91}$$

em que l é a distância mínima entre pontos não distinguíveis, a uma distância de z dos olhos. Aplicando esse resultado com os dados fornecidos no problema, temos que

$$5,82.10^{-4}\text{rad} = \frac{\left(\frac{25,4\text{mm}}{300}\right)}{z}$$

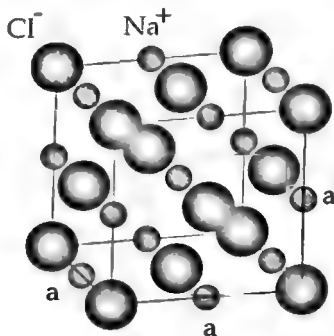
$$z = 145\text{mm}. \tag{3.92}$$

3.20 Lei de Bragg e difração de raios-X

(a) A interferências construtiva acontece quando a diferença de percurso entre duas ondas é dado por $\Delta d = m\lambda$, onde m é um número inteiro. Da figura do problema, podemos verificar que a diferença de caminhos entre os dois raios destacados é dada por $\Delta d = 2d\text{sen}\theta$.

Dessa maneira, chega-se a lei de Bragg

$$2d\text{sen}\theta = m\lambda, \quad m = 1,\ 2,\ 3, \ldots \tag{3.93}$$

(b) Na figura a seguir, podemos observar a célula básica da estrutura cúbica do cloreto de sódio (NaCl). Nos vértices e nas faces do cubo localizam-se átomos de cloro, enquanto nas arestas e no centro do cubo encontram-se átomos de sódio. Essa estrutura cristalina é conhecida como *Rock Salt.*

Define-se o parâmetro de rede a da estrutura como a aresta do cubo ilustrado. Podemos calcular a densidade do material dividindo a massa total compreendida pelo cubo pelo seu volume. Levando em conta que os átomos localizados na fronteira do cubo são divididos com as células vizinhas, pode-se verificar que existem 4 átomos de sódio e 4 átomos de cloro para cada célula.

Dessa maneira, temos que

$$\rho = \frac{4m_{\mathrm{Na}} + 4m_{\mathrm{Cl}}}{a^3}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{4(m_{\mathrm{Na}} + m_{\mathrm{Cl}})}{\rho}} = 5,64.10^{-10}\mathrm{m}. \tag{3.94}$$

Observe agora que a aresta a do cubo corresponde ao dobro da distância entre os planos d. Portanto,

$$d = \frac{a}{2} = 2,82\mathring{A}. \tag{3.95}$$

Agora basta aplicar a lei de Bragg ao problema,

$$2d\mathrm{sen}\theta = 2\lambda$$

$$\lambda = d\mathrm{sen}\theta = 2.44\mathring{A}. \tag{3.96}$$

(c) Para responder essa pergunta, basta observar a ordem de grandeza dos comprimentos de onda das ondas eletromagnéticas envolvidas no problema. Para que existam efeitos de interferência relevantes é necessário que as diferenças de caminho envolvidas sejam da ordem do comprimento de onda.

De fato, verifica-se que o parâmetro de rede da estrutura cristalina do NaCl e o comprimento de onda do raio-X utilizando tem

a ordem de unidades de Å. Como essas dimensões são muito menores do que o comprimento de onda típico da luz visível, que é tipicamente de décimos de micrômetro, não se verificam efeitos de difração apreciáveis no espectro visível.

Parte IV

Bibliografia

1 Referências

1.1 Bibliografia de estudo recomendada

- Base e aprofundamento a nível de ensino médio:
    1. Tópicos de Física - Vol. 1;
    2. Tópicos de Física - Vol. 2;
    3. Fundamentos de Mecânica para Vestibulandos IME ITA - Vol 1, Renato Brito;
    4. Fundamentos de Mecânica para Vestibulandos IME ITA - Vol 2, Renato Brito.

- Cálculo diferencial e integral:
    1. Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 8 - Limites Derivadas Noções de Integral, Gelson Iezzi/ Nilson José Machado/ Carlos Murakami;
    2. Um Curso de Cálculo Vol. 1., Hamilton Luiz Guidorizzi;
    3. Cálculo - Vol. 1, James Stewart;
    4. Cálculo para aprender e usar, João Barcelos Neto;

5. Equações Diferenciais Aplicadas à Física, Kleber Daum Machado.

- Teoria e exercícios a nível superior:

1. Física para Cientistas e Engenheiros - Volume 1, Paul Tipler;
2. Princípios de Física Vol. 1 - Mecânica Clássica e Relatividade, Raymond A. Serway e John W. Jewett Jr.;
3. Fundamentos de Física 1 - Mecânica, David Halliday, Robert Resnick e Jearl Walker;
4. Fundamentos de Física 4 - Óptica e Fisíca Moderna, David Halliday, Robert Resnick e Jearl Walker;
5. Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions, David Morin;
6. Curso de Física Básica - Mecânica - Vol. 1, Moyses H. Nussenzveig;
7. Curso de Física Básica - Fluidos, Oscilações e Ondas de Calor - Vol. 2, Moyses H. Nussenzveig.

1.2 Bibliografia referente aos problemas propostos

1. Curso de Física Básica - Mecânica - Vol. 1, Moyses H. Nussenzveig;
2. Curso de Física Básica - Fluidos, Oscilações e Ondas de Calor - Vol. 2, Moyses H. Nussenzveig;
3. Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions, David Morin;
4. Problems in General Physics, Igor E. Irodov;

5. 200 Puzzling Physics Problems: With Hints and Solutions, P. Gnädig, G. Honyek, K. F. Riley;
6. Provas da olimpíada ibero-americana de Física (OIbF);
7. Provas da olimpíada internacional de Física (IPhO);
8. Seletivas brasileiras de Física (Brasil);
9. Seletivas portuguesas de Física (Portugal);
10. Programa de preparação POPTOR (Canadá);
11. Boston Area Undergraduate Physics Competition - BAUPC (EUA);
12. A Guide to Physics Problems, Part 1: Mechanics, Relativity, and Electrodynamics, Sidney B. Cahn, Boris E. Nadgorny;
13. A Guide to Physics Problems: Part 2: Thermodynamics, Statistical Physics, and Quantum Mechanics, Sidney B. Cahn, Boris E. Nadgorny;
14. Physics Teacher, American Association of Physics Teachers (EUA).

Esse livro traz uma coletânea de 85 desafios de Física destinados para a preparação de estudantes para olimpíadas científicas de Física. Todos os problemas propostos vêm acompanhados de dicas e soluções. O nível de dificuldade dos problemas abrange desde a preparação para vestibulares de alta performance até competições nacionais/internacionais de Física, com alguns problemas interessantes até mesmo para estudantes universitários.

Os desafios escolhidos envolvem conhecimentos de cinemática e dinâmica da partícula, termologia, gases ideais, termodinâmica, teoria cinética dos gases, noções de mecânica estatística, óptica geométrica, óptica física e ondulatória. O livro é organizado em três capítulos:

- Mecânica;
- Termodinâmica;
- Óptica e ondulatória.

Ivan Guilhon é doutorando no programa de Física Atômica e Molecular no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Graduado em Engenharia Eletrônica pelo mesmo instituto, tendo recebido distinção Magna Cum Laude pelo seu alto grau de desempenho acadêmico no curso. Como competidor de olimpíadas científicas foi premiado com medalha de prata na olimpíada internacional de Física (IPhO), além de outras premiações em competições nacionais e internacionais. O autor tem trabalhos apresentados em congressos científicos e artigos publicados em periódicos de Física.